Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2007/2008
Logique et théorie des ensembles

Théorie des modèles
Feuille 8.

Dans toute cette feuille I désigne un ensemble infini.

On dit qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I est *régulier* s'il contient une famille d'ensembles $(X_j)_{j\in I}$ tels que pour tout $i \in I$ l'ensemble $\{j \in I \colon i \in X_j\}$ est fini.

Soit λ un cardinal ; on dit qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I est *λ-complet* si pour tout cardinal $\kappa < \lambda$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ on a $\bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in \mathcal{U}$.

I. *Prise de contact.*
Montrer que tout ultrafiltre est ω-complet, et que pour tout ensemble infini I il existe un ultrafiltre régulier sur I.
Remarque. Par contre, l'existence d'un ultrafiltre ω_1-complet non principal est un énoncé indépendant de ZFC (qui implique par exemple l'existence de cardinaux inaccessibles).

II. *Deux notions opposées.*
Montrer qu'il n'existe pas d'ultrafiltre régulier et ω_1-complet sur I.

III. *Cardinaux d'ultraproduits, 1.*
Montrer que si l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ n'est pas ω_1-complet alors tout ultraproduit $\prod A_i/\mathcal{U}$ est fini ou de cardinal supérieur à $2^{\aleph_0}$.

IV. *Cardinaux d'ultraproduits, 2.*
Montrer que si $\mathcal{B}$ est un ultraproduit de structures finies alors B est soit fini soit de cardinal supérieur à $2^{\aleph_0}$

V. *De drôles de types...*
(a) On considère la théorie T dans le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ dont les modèles sont des relations d'équivalence avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique classe de cardinal n. En utilisant ce qui a été vu en DM sur cette théorie, décrire les 1-types de T.
(b) Même question pour la théorie T dans le langage $\mathcal{L} = \{E_i\}_{i<\omega}$ dont les modèles sont des relations d'équivalence "emboîtées" qui a été étudiée dans un TD précédent (rappelons que pour tout x, y on a xE_0y, toutes les E_i-classes sont infinies, et chaque E_i-classe est la réunion disjointe de deux E_{i+1}-classes).

VI. *Cardinal de $S_n(T)$.*
Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$, et n un entier naturel.
Montrer que si $|S_n(T)| > \aleph_0$ alors on a nécessairement $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

VII. *Types principaux.*
Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$. On dit qu'un k-type $p(x_1, \ldots, x_k)$ est *principal* s'il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in p(x_1, \ldots, x_k)$ telle que pour toute $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in p(x_1, \ldots, x_n)$ on ait $T \vdash \forall x_1, \ldots, x_n(\psi(x_1, \ldots, x_n) \to \phi(x_1, \ldots, x_n))$.
On fixe maintenant un entier naturel n et on suppose que $S_n(T)$ est au plus dénombrable ; montrer que toute formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ consistante avec T est contenue dans un n-type principal.