Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2007/2008
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Théorie des modèles
Feuille 9.

I. Dans cet exercice on considère le langage $\mathcal{L} = \{<\}$, où $<$ est une relation unaire, et la $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{Q}, <)$, où $<$ est l'ordre usuel sur les rationnels.
(a) On définit

$$A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \ .$$

Montrer que $\mathrm{tp}_{(\mathbb{Q},<)}(1/A) = \mathrm{tp}_{(\mathbb{Q},<)}(2/A)$, mais qu'il n'existe pas d'automorphisme de $\mathbb{Q}$ qui fixe A et envoie 1 sur 2.
(b) Soit r un nombre réel irrationnel. On considère deux suites adjacentes (a_i) et (b_i) dans $\mathbb{Q}$ tendant vers r. Montrer que $(\mathbb{Q}, <)$ a une extension élémentaire $\mathcal{Q}$ dans laquelle le type déterminé par

$$\{a_i < x | i < \omega\} \cup \{x < b_i | i < \omega\}$$

est réalisé par une infinité d'éléments.
Soit maintenant $c_1, \ldots, c_n, x$ des réalisations de ce type dans $\mathcal{Q}$ et $\phi(x; c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l)$ une formule satisfaite par x dans $\mathcal{Q}$ avec les a_i dans la base de $\mathcal{Q}$ et d_j dans $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $c'_1, \ldots, c'_k \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\mathcal{Q} \models \phi(c, a'_1, \ldots, c'_k, d_1, \ldots, d_l)$$

II. Ici on se place dans le langage des corps $\mathcal{L} = \{+, ., -, ^{-1}, 0, 1\}$ et on considère les $\mathcal{L}$-structures $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, autrement dit l'ensemble des complexes qui sont racines d'un polynôme non nul à coefficients rationnels). Déterminer quelles structures de cette liste sont ω-saturées.

III. On reprend une théorie vue en TD (feuille 6) : dans le langage $\mathcal{L} = \{E_i\}_{i<\omega}$, on considère la théorie T qui dit que chaque E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe, et que chaque E_i-classe est la réunion de deux E_{i+1}-classes infinies. On utilisera ce qui a été vu précédemment sur cette théorie.
(a) Décrire les 1-types de T ; quel est le cardinal de $S_1(T)$?
(b) Soit k un entier ; calculer le cardinal de $S_k(T)$.
Maintenant on fixe un modèle riche (= ω-saturé !) $\mathcal{M}$ de T et une partie $A \subset M$.
(c) Calculer le cardinal de $S_1^{\mathcal{M}}(A)$ si A est finie.
(d) Même question en supposant cette fois A infinie et dénombrable.

IV. On se place dans le langage $\mathcal{L} = \{R\}$, où R est une relation binaire. On considère la théorie T dans ce langage qui dit que R est symétrique et irréflexive (i.e les modèles de T sont des graphes) et telle que pour deux ensembles finis disjoints X_1, X_2 de sommets il existe un point qui est R-lié à tous les éléments de X_1 et n'est R-lié à aucun des éléments de X_2.
(a) Donner une axiomatisation de cette théorie.
(b) Montrer que les modèles de T sont nécessairement infinis, et que deux modèles dénombrables de T sont isomorphes (l'unique modèle dénombrable de T, à isomorphisme près, est appelé le *graphe aléatoire*). Prouver que T est complète.
(c) Montrer que tous les modèles de T sont ω-saturés.
(d) Décrire les k-types de T et calculer le cardinal de $S_k(T)$ pour tout entier k.
On se place maintenant dans un (le) modèle dénombrable $\mathcal{G}$ de T, et l'on fixe une partie $A \subset G$.
(e) On suppose que A est finie ; calculer le cardinal de $S_k^{\mathcal{G}}(A)$ pour tout entier k.
(f) Même question en supposant cette fois A infinie.