CHAPITRE V

Les cardinaux

RÉSUMÉ. • *Tout ensemble fini est en bijection avec un unique entier, appelé son* cardinal *; toutes les formules de dénombrement fini usuelles se démontrent à partir de* ZFC.
• *Tout ensemble infini est en bijection avec un unique* cardinal, *défini comme un ordinal qui n'est en bijection avec aucun ordinal strictement plus petit.*
• *Tout cardinal κ a un plus petit* successeur κ^+ *; un cardinal non successeur est dit* limite. *Les cardinaux infinis s'énumèrent en une suite croissante $(\aleph_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Ord}}$* (aleph)*, avec $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ et $\aleph_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda}\aleph_\alpha$ pour λ limite.*
• *Définis à partir de l'union disjointe et du produit cartésien, l'*addition *et la* multiplication *cardinales sont simples: pour κ, λ cardinaux infinis, on a $\kappa+\lambda = \kappa\cdot\lambda = \sup(\kappa, \lambda)$, et, en particulier, $\kappa\cdot\kappa = \kappa$. A partir des unions et produits infinis, on construit les sommes et produits infinis de cardinaux. Si on a $\kappa_i < \lambda_i$ pour tout i, alors on a $\sum_i \kappa_i < \prod_i \lambda_i$ (théorème de König).*
• *La* cofinalité $\mathrm{cf}(A)$ *d'un ensemble ordonné A est le plus petit ordinal indexant une suite non bornée dans A. Pour α ordinal, $\mathrm{cf}(\alpha)$ est un cardinal $\leqslant \alpha$, et on a $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Un cardinal κ est dit* régulier *(resp.* singulier*) si on a $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ (resp. $<$). Tout cardinal successeur est régulier.*
• *Pour κ, λ cardinaux, on a $\mathrm{card}\{f\,;\, f\colon \lambda \to \kappa\} = \kappa^\lambda$ et $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(A)) = 2^{\mathrm{card}(A)}$. L'*hypothèse du continu généralisée (HCG) *est l'hypothèse $2^\kappa = \kappa^+$ pour tout κ. Moyennant* HCG, *on calcule explicitement κ^λ pour tous κ, λ.*
• *Une partie de ω_1 est dite* close cofinale *si elle est non bornée et close par passage au sup d'une suite croissante. Toute intersection finie ou dénombrable de clos cofinaux de ω_1 est un clos cofinal. Une partie de ω_1 est dite* stationnaire *si elle rencontre tout clos cofinal. Si $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ vérifie $f(\alpha) < \alpha$ sur un ensemble stationnaire, alors f est constante sur un ensemble stationnaire (théorème de Fodor).*
• *Si $2^\kappa = \kappa^+$ est vrai pour tout $\kappa < \aleph_{\omega_1}$, alors c'est aussi vrai pour $\kappa = \aleph_{\omega_1}$ (théorème de Silver).*

► Le but de ce chapitre est d'examiner des questions de cardinalité et d'établir des résultats élémentaires de combinatoire finie et, surtout, infinie. Le problème central est celui du dénombrement des applications d'un ensemble dans un autre, qui inclut en particulier celui du dénombrement des parties d'un ensemble. Les outils techniques principaux sont ici les cardinaux, et la notion de cofinalité d'un cardinal.

Le plan est le suivant. Dans la section 1, on introduit les cardinaux et la notation des alephs, et on passe en revue rapidement les cardinaux finis. Dans la section 2, on étudie les opérations de l'arithmétique cardinale, sommes et produits finis et infinis, puis on discute brièvement les problèmes de cardinalité lorsque l'axiome du choix n'est pas utilisé. Dans la section 3, on introduit la notion de cofinalité d'un cardinal, et on montre comment l'utiliser pour progresser dans l'étude de l'opération puissance, en particulier lorsque l'hypothèse généralisée du continu est admise. Enfin, dans la section 4, on examine le cas particulier de la combinatoire sur ω_1, premier ordinal non dénombrable, à partir de la notion d'ensembles clos cofinaux et stationnaires, et on démontre les théorèmes de Fodor et de Silver.

Sauf pour la section 2.3, le cadre général dans tout ce chapitre — comme dans toute la suite du texte — est le système ZFC : autrement dit, on s'autorise toujours à utiliser AC et les axiomes de remplacement sans le mentionner explicitement. ◀

▷ *Avec le système* ZFC*, on dispose désormais d'un cadre formel précis pour développer la théorie des ensembles, et en particulier aborder les problèmes de dénombrement posés au chapitre I. Pour cela, il est commode de définir un représentant distingué par classe d'équipotence, à la façon dont on a construit les ordinaux comme représentants distingués des classes d'isomorphisme de bons ordres. On introduit ici une telle famille de représentants, appelés cardinaux, et définis comme des ordinaux particuliers, à savoir ceux qui sont minimaux dans leur classe d'équipotence, et on montre en effet que (moyennant l'axiome du choix* AC*) tout ensemble est équipotent à un unique cardinal. On parvient alors rapidement à la suite des cardinaux infinis $\aleph_\alpha$ introduits par Cantor, et à toute une nouvelle arithmétique des cardinaux, distincte de l'arithmétique des ordinaux développée au chapitre II. C'est cette arithmétique qu'on étudie ici.*

En sus des résultats élémentaires classiques, on établit ici le théorème de Silver sur la valeur de $2^{\aleph_{\omega_1}}$, qu'on déduit du théorème de Fodor sur les sous-ensembles stationnaires de ω_1 : l'un des intérêts de ces résultats remarquables est de montrer que la combinatoire du non dénombrable est très différente de celle du dénombrable.

Pour intéressants et non triviaux qu'ils soient, les résultats de ce chapitre peuvent néanmoins apparaître décevants dans la mesure où aucune réponse décisive n'est apportée aux questions du chapitre I, en particulier aucune avancée sur le problème du continu. Ceci illustre la difficulté des problèmes et le caractère encore rudimentaire et préliminaire des outils développés, mais aussi, au-delà, commence à laisser entrevoir en creux les lacunes du système ZFC*.* ◁

1. Cardinaux finis et infinis

▶ On choisit un représentant distingué pour chaque classe d'équipotence. ◀

▷ *Au chapitre II, on a construit des représentants distingués pour les classes d'isomorphisme de bons ordres, à savoir les ordinaux. On fait de même ici avec les classes d'équipotence, c'est-à-dire en considérant les bijections entre ensembles nus au lieu des isomorphismes d'ensembles ordonnés. En fait, et comme dans le cas des ordinaux, il n'est pas en soi très important de distinguer de tels représentant, mais le choix fait ici, à savoir celui du plus petit ordinal de la classe d'équipotence, est commode techniquement, en particulier pour développer une arithmétique cardinale.* ◁

1.1. La notion de cardinal.

▶ On définit la classe des cardinaux. ◀

▷ *Dans le contexte de* ZFC*, c'est-à-dire en présence de l'axiome du choix, le théorème de Zermelo affirme que tout ensemble est bien ordonnable, donc est en bijection avec un ordinal. Chaque classe d'équipotence contient donc au moins un ordinal. Comme la classe des ordinaux est bien ordonnée, c'est-à-dire que chaque sous-ensemble — ou sous-classe — non vide a un plus petit élément, le choix s'impose : prendre comme représentant distingué d'une classe d'équipotence le plus petit ordinal qu'elle contient.* ◁

DÉFINITION 1.1. (cardinal) On appelle *cardinal* un ordinal qui est le plus petit de sa classe d'équipotence, c'est-à-dire qui n'est en bijection avec aucun ordinal plus petit que lui.

Comme les cardinaux sont des ordinaux, on utilise des minuscules grecques pour les représenter, et typiquement κ, puis λ, μ *etc.*

EXEMPLE 1.2. (cardinal) Par la proposition III.2.19, tous les ordinaux finis sont des cardinaux. Il en est de même de l'ordinal ω puisque, par hypothèse, il est infini alors que tous les ordinaux inférieurs sont finis. Par contre $\omega + 1$ n'est pas un cardinal, puisqu'en posant $f(\omega) = 0$ et $f(n) = n+1$ pour tout entier n on obtient une bijection de $\omega + 1$ sur ω, qui lui est inférieur. De même, $\omega + \omega$ n'est pas un cardinal, puisqu'en posant $f(n) = 2n$ et $f(\omega+n) = 2n+1$ on obtient une bijection de $\omega + \omega$ sur ω.

LEMME 1.3. *Les cardinaux forment une classe propre*[1].

DÉMONSTRATION. Le fait d'être un ordinal et la non-existence d'une bijection avec un ordinal strictement plus petit peuvent s'exprimer par des formules ensemblistes. Par exemple, on peut écrire que κ est un cardinal si et seulement on a

$$\kappa \in \mathbf{Ord} \text{ et } \forall\alpha{<}\,\kappa\,\forall f{:}\alpha \to \kappa\ \exists\beta{\in}\kappa\ \forall\gamma{\in}\alpha\ \ (f(\gamma) \neq \beta)), \tag{1.1}$$

en tenant compte de ce que l'existence d'une surjection de α sur κ garantit celle d'une injection de κ dans α, puis celle d'une bijection de α sur κ par le théorème de Cantor-Bernstein, puisque, dans tous les cas, l'identité fournit une injection de α dans κ. Par conséquent les cardinaux forment une classe.

Supposons que Ω est un ensemble contenant tous les cardinaux, et soit α la borne supérieure de Ω. Alors, par construction, il doit exister pour tout ensemble A un ordinal $\beta \leqslant \alpha$ et une surjection de β sur A, donc *a fortiori* de α sur A. Appliquer ceci à l'ensemble $\mathfrak{P}(\alpha)$ contredit le théorème de Cantor. Donc Ω ne peut exister. □

A l'occasion, on notera **Card** la classe de tous les cardinaux.

PROPOSITION 1.4. (cardinalité) *Tout ensemble est en bijection avec un unique cardinal.*

DÉMONSTRATION. On a déjà donné l'argument. Le théorème de Zermelo garantit que, pour tout ensemble A, il existe un bon ordre $<$ sur A, et le théorème de représentation affirme alors qu'il existe un (unique) ordinal α tel que $(A, <)$ soit isomorphe à $(\alpha, \in)$. Oubliant l'ordre, on déduit que l'ensemble A est en bijection avec l'ordinal α[2]. Soit alors κ le plus petit des ordinaux en bijection avec α. Par transitivité, A est en bijection avec κ, et κ est un cardinal par construction.

Pour l'unicité, on note que deux cardinaux distincts ne sont jamais en bijection : si κ, μ sont des cardinaux distincts, l'un est plus petit que l'autre, et l'existence d'une bijection entre eux contredirait l'hypothèse que le plus grand est un cardinal. □

[1] c'est-à-dire qui n'est pas un ensemble

[2] Noter qu'inversement, l'existence d'une bijection de A sur un ordinal α garantit l'existence d'un bon ordre sur A : il suffit d'utiliser la bijection de α sur A pour transporter le bon ordre canonique de α vers A.

DÉFINITION 1.5. (cardinalité) Si A est un ensemble, l'unique cardinal κ tel que A est en bijection avec κ est appelé le *cardinal* — ou la *cardinalité* — de A, et noté $\#A$ ou $\mathrm{card}(A)$.

Par exemple, on a $\mathrm{card}(\omega + 1) = \omega$. Pour tout ordinal infini α, il existe une bijection de α sur $\alpha+1$, d'où il résulte qu'un ordinal successeur infini n'est jamais un cardinal : un cardinal infini est toujours un ordinal limite.

$\triangleright$ *On attend de la notion de cardinalité qu'elle corresponde à la notion intuitive de taille d'un ensemble, et se comporte donc comme telle vis-à-vis des injections et des surjections. Le résultat suivant montre que c'est bien le cas.* $\triangleleft$

PROPOSITION 1.6. (injection) *Soient A, B deux ensembles. Alors il existe une injection (resp. une surjection, resp. une bijection) de A dans B si et seulement si on a* $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$ *(resp. $\geqslant$, resp. $=$).*

DÉMONSTRATION. En composant avec les bijections de A sur $\mathrm{card}(A)$ et de $\mathrm{card}(B)$ sur B, on déduit de toute injection de A dans B une injection de $\mathrm{card}(A)$ dans $\mathrm{card}(B)$, et inversement. Or, pour κ, λ cardinaux, on a ou bien $\kappa \leqslant \lambda$, auquel cas l'application identité est une injection de κ dans λ, ou bien $\kappa > \lambda$, auquel cas il ne peut exister d'injection de κ dans λ, car, sinon, le théorème de Cantor–Bernstein entraînerait l'existence d'une bijection entre κ et λ, contredisant l'hypothèse que κ est un cardinal.

On déduit le résultat pour les surjections de la proposition IV.1.13, dont on rappelle qu'elle utilise l'axiome du choix comme hypothèse. $\square$

On a vu au chapitre I qu'il n'existe jamais de surjection d'un ensemble A sur son ensemble des parties (théorème de Cantor). On en tire :

COROLLAIRE 1.7. *Pour tout ensemble A, on a* $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(A)) > \mathrm{card}(A)$.

1.2. Dénombrements finis.

▶ Dans le cas des ensembles finis, la notion de cardinal correspond au nombre d'éléments, et tous les résultats usuels de la combinatoire finie peuvent être facilement établis dans ce contexte. ◀

On rappelle que les ensembles finis sont définis comme ceux qui sont en bijection avec un intervalle initial $[0, n[$ [3] de ω. Le point de départ de la combinatoire finie est le résultat suivant :

LEMME 1.8. *Tout entier est un cardinal.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition III.2.19 — dont la démonstration n'utilise que les axiomes de Z — toute injection d'un intervalle $[0, n[$ dans lui-même est une bijection. Il en résulte qu'il ne peut exister de bijection de $[0, n[$ sur $[0, p[$ avec $p < n$: en effet, une telle bijection serait une injection non surjective de $[0, n[$ dans $[0, n[$. $\square$

[3] donc avec n lui-même puisqu'il se trouve que, dans la construction utilisée ici, n coïncide avec l'intervalle $[0, n[$; il n'empêche que, dans le contexte des dénombrements, il reste plus intuitif de penser à un intervalle

Il en résulte qu'un ensemble fini est en bijection avec un entier unique.

▷ *La définition posée correspond bien à l'intuition du cardinal d'un ensemble fini A : l'unique entier n tel qu'on puisse numéroter les éléments de A de 0 à $n-1$ — ou, de façon équivalente, de 1 à n. Toutes les propriétés de dénombrement familières peuvent être établies sans peine, généralement par une induction qui, en dernier ressort, repose sur le résultat suivant.* ◁

LEMME 1.9. *Si A est fini de cardinal n, et si a n'appartient pas à A, alors $A \cup \{a\}$ est fini de cardinal $n+1$.*

DÉMONSTRATION. Si f est une bijection de $[0, n[$ sur A, alors $f \cup \{(n, a)\}$ est une bijection f' de $[0, n+1[$ sur $A \cup \{a\}$. □

PROPOSITION 1.10. (dénombrement) *Soient A, B des ensembles finis de cardinalités respectives p, q. Alors les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$, A^B sont finis, et on a*

$$\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = p + q, \quad \#(A \times B) = pq, \quad \#(A^B) = p^q. \tag{1.2}$$

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur q. Pour $q = 0$, c'est-à-dire si B est vide, on a $A \cup B = A$, $A \cap B = A \times B = \emptyset$, et $A^B = \{\emptyset\}$.

Supposons maintenant $q > 0$. On fixe une bijection g de $[0, q[$ sur B, et on note b l'élément $g(q-1)$ et B' le sous-ensemble $B \setminus \{b\}$ de B. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\#(A \cup B') + \#(A \cap B') = p + q - 1, \quad \#(A \times B') = p(q-1), \quad \#(A^{B'}) = p^{q-1}.$$

Alors ou bien b appartient à A, d'où $A \cup B = A \cup B'$ et $A \cap B = (A \cap B') \cup \{b\}$, puis $\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = p + (q+1)$ par le lemme 1.9, ou bien b n'appartient pas à A, d'où $A \cup B = (A \cup B') \cup \{b\}$ et $A \cap B = A \cap B'$, puis $\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = (p+1) + q$ par le lemme 1.9 à nouveau.

Ensuite, $A \times B$ est la réunion de $A \times B'$ et de $A \times \{b\}$, et ces deux ensembles sont disjoints par construction. Par hypothèse de récurrence, le premier a pour cardinal $p(q-1)$, et l'application $a \mapsto (a, b)$ établit une bijection entre A et le second, qui a donc pour cardinal p. Appliquant le résultat précédent, on obtient

$$\#(A \times B) = \#(A \times B') + \#A = p(q-1) + p = pq.$$

Enfin, l'application $f \mapsto (f{\restriction}_{B'}, f{\restriction}_{\{b\}})$ établit une bijection entre A^B et $A^{B'} \times A^{\{b\}}$. Par hypothèse de récurrence, $A^{B'}$ a pour cardinal p^{q-1}, et, d'autre part, l'application $a \mapsto (b \mapsto a)$ établit une bijection entre A et les applications de $\{b\}$ dans A, qui forment donc un ensemble de cardinal p. Appliquant le résultat précédent, on obtient

$$\#(A^B) = \#(A^{B'}) \times \#A = p^{q-1} \times p = p^q,$$

ce qui termine la démonstration. □

▷ *Plus qu'un résultat à proprement parler, la proposition 1.10 est une vérification de la cohérence du vocabulaire et du contexte axiomatique : l'usage premier, historique, des entiers naturels est précisément de désigner les classes d'équipotence d'ensembles finis, et un cadre axiomatique qui ne permettrait pas de réobtenir tous les dénombrements usuels serait tout simplement intenable.*

On remarquera que les vérifications données ici se placent dans le cadre du système Z, *où la seule hypothèse sur ω et les entiers est que le principe d'induction s'applique à ω : on n'a jamais à utiliser comme argument de démonstration le fait — intuitivement vrai mais non inclus dans les axiomes — que tous les entiers sont de la forme* $\underline{\mathsf{n}}$ *avec* n *dans* $\mathbb{N}$. *En d'autres termes, on n'a pas à supposer que les entiers coïncident avec les entiers intuitifs, et toutes les démonstrations resteraient donc valides même s'il existait dans ω des entiers non de la forme* $\underline{\mathsf{n}}$.

La proposition 1.10 est la base de la plupart des dénombrements finis, et de là de toute la combinatoire énumérative. A part d'en fonder le contexte global, la théorie des ensembles et la logique n'ont que peu à apporter au développement de cette branche[4]*, et on n'ira pas plus loin ici.* ◁

1.3. Les cardinaux infinis.

▶ On introduit l'énumération des cardinaux infinis par la suite des alephs. ◀

▷ *La combinatoire infinie est très différente de la combinatoire finie puisque tous les ordinaux ne sont pas des cardinaux. On va voir ici qu'il existe une énumération canonique des cardinaux infinis. Le point de départ est le résultat qu'il existe toujours un cardinal au-dessus de chaque cardinal, et donc que la suite des cardinaux n'est pas bornée supérieurement. Si on l'établit comme on l'a fait à partir du théorème de Cantor (corollaire 1.7), le résultat semble requérir l'axiome du choix. En fait, il n'en dépend pas, car on peut recourir à l'argument de la proposition II.3.20, déjà rediscuté dans la proposition III.2.24 lors de l'introduction des axiomes de remplacement.* ◁

Lemme 1.11. *Pour tout ensemble infini A, il existe un plus petit ordinal θ ne s'injectant pas dans A ; cet ordinal θ s'injecte dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \times A))$, et c'est un cardinal.*

Démonstration. Posons

$$W := \{R \in \mathfrak{P}(A \times A)\,;\, R \text{ est un bon ordre sur une partie de } A\}.$$

Notons $\mathbf{F}$ la classe fonctionnelle qui associe à chaque bon ordre l'unique ordinal qui lui est isomorphe. Par remplacement, l'image de l'ensemble W par $\mathbf{F}$ est un certain ensemble d'ordinaux Θ. De plus, Θ est clos par minorant et n'a pas de plus grand élément, donc Θ est lui-même un ordinal, à savoir le plus petit ordinal θ qui n'est pas dans Θ.

Supposons $\beta < \theta$. Alors, par construction, β est dans $\mathbf{F}[W]$, donc il existe une partie B de A et un bon ordre R sur B tels que $(\beta, <)$ est isomorphe à (B, R) et donc, en particulier, β est en bijection avec B, donc s'injecte dans A. Par contre, s'il existait une injection f de θ dans A, on obtiendrait en transportant par f le bon ordre de θ un bon ordre isomorphe à θ sur $\mathrm{Im} f$, ce qui entraînerait que θ serait dans $\mathbf{F}[W]$, autrement dit dans Θ, contrairement à sa définition. Donc θ est le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans A.

Ensuite, la classe fonctionnelle $\mathbf{F}^{-1}$, qui à chaque ordinal β plus petit que θ associe l'ensemble des bons ordres de type β sur une partie de A, définit une injection de θ dans $\mathfrak{P}(B)$, donc dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \times A))$.

Enfin, pour $\beta < \theta$, il existe une injection de β dans A, donc il ne peut exister de bijection de β sur θ. Par conséquent θ est un cardinal. □

Proposition 1.12. (successeur) *Pour tout cardinal (infini) κ, il existe un plus petit cardinal supérieur à κ.*

Démonstration. Le lemme 1.11 fournit un plus petit ordinal θ ne s'injectant pas dans κ, et, de plus, θ est un cardinal. Comme tout ordinal $\alpha \leqslant \kappa$ s'injecte dans κ, on a $\theta > \kappa$, et, si λ est un cardinal vérifiant $\lambda < \theta$, on doit avoir $\lambda \leqslant \kappa$. Donc θ est un cardinal supérieur à κ, et est le plus petit d'entre eux. □

[4] tout au moins à un niveau élémentaire ; la théorie de Ramsey révèle des liens profonds entre combinatoires finie et infinie

Définition 1.13. (successeur, limite) Pour chaque cardinal κ, on note κ^+ le plus petit cardinal plus grand que κ. On appelle *successeur* tout cardinal de la forme κ^+, et *limite* tout cardinal qui n'est pas successeur.

Par exemple, les entiers non nuls, ainsi que l'ordinal ω_1, sont des cardinaux successeurs, alors que 0 et ω sont des cardinaux limites. Pour la suite, on note :

Lemme 1.14. *Supposons que* $(I, <)$ *est un ensemble totalement ordonné et que* $(\kappa_i)_{i \in I}$ *est une suite strictement croissante de cardinaux. Alors* $\sup_{i \in I} \kappa_i$ *est un cardinal.*

Démonstration. Le résultat est trivial si $(I, <)$ a un plus grand élément, et on suppose donc que ce n'est pas le cas. Soit $\kappa := \sup_{i \in I} \kappa_i$, et soit α un ordinal plus petit que κ. Par construction, on a $\alpha \leqslant \kappa_i$ pour un certain i dans I. Soit j un élément de I plus grand que i. Puisque κ_j est un cardinal, il ne peut exister de surjection de κ_i sur κ_j, donc, *a fortiori*, de surjection de α sur κ_j, et, *a fortiori* encore, de α sur κ. □

Les axiomes de ZF garantissent l'existence du cardinal infini ω, ainsi que le caractère fonctionnel des deux classes « $\lambda = \kappa^+$ » et « $y = \bigcup x$ ». De plus, le lemme 1.14 garantit que le borne supérieure d'une suite strictement croissante de cardinaux est un cardinal. Appliquant la proposition III.3.11, on déduit l'existence d'une unique classe fonctionnelle $\mathbf{S}$ vérifiant $\mathbf{S}(0) = \omega$, $\mathbf{S}(\alpha + 1) = \mathbf{S}(\alpha)^+$, et $\mathbf{S}(\lambda) = \bigcup\{\mathbf{S}(\alpha) \,;\, \alpha < \lambda\}$ pour λ limite.

Définition 1.15. (aleph) Pour tout ordinal α, on appelle α-ème *aleph* le cardinal infini $\aleph_\alpha$ défini par

$$\aleph_0 = \omega, \qquad \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+, \qquad \aleph_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \text{ pour } \lambda \text{ limite.} \tag{1.3}$$

Proposition 1.16. (aleph) *Tout cardinal infini est un aleph.*

Démonstration. Par construction et par le lemme 1.14, la suite des $\aleph_\alpha$ est strictement croissante mais, *a priori*, il pourrait se faire qu'elle ne soit pas surjective. On montre par induction sur κ cardinal infini qu'il existe un ordinal α vérifiant $\kappa = \aleph_\alpha$. Pour $\kappa = \omega$, on a $\kappa = \aleph_0$. S'il existe un cardinal infini μ vérifiant $\kappa = \mu^+$, alors, par hypothèse d'induction, il existe α vérifiant $\mu = \aleph_\alpha$, et on a alors $\kappa = \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$. Supposons enfin que κ est un cardinal limite. Posons $A = \{\alpha \,;\, \aleph_\alpha < \kappa\}$. Alors A est un ensemble car, d'une part, A est une classe car la suite des $\aleph_\alpha$ est définissable, et d'autre part, c'est un ensemble et non une classe propre, car une induction immédiate donne $\xi \leqslant \aleph_\xi$ pour tout ordinal ξ, et donc $A \subseteq \kappa$. Soit $\lambda = \sup A$. Alors λ est un ordinal, et, nécessairement, un ordinal limite. En effet, sinon, A aurait un plus grand élément α, et κ serait $\aleph_\alpha^+$, donc $\aleph_{\alpha+1}$. Il en résulte que λ n'est pas dans A. Comparons alors κ et $\aleph_\lambda$. Par hypothèse, pour $\alpha < \lambda$, on a $\aleph_\alpha < \kappa$, d'où $\aleph_\lambda \leqslant \kappa$. Par ailleurs, $\aleph_\lambda < \kappa$ entraînerait $\lambda \in A$, ce qui n'est pas. La seule possibilité est donc $\kappa = \aleph_\lambda$, et κ est un aleph. □

Exemple 1.17. (aleph) Par construction, tout ordinal infini est en bijection avec un et un seul aleph. Par exemple, ω_1 est le plus petit ordinal non en bijection avec ω, c'est-à-dire non dénombrable : on a donc $\omega_1 = \aleph_1$. De même, ω_2 est le plus petit ordinal infini qui n'est en bijection ni avec ω, ni avec ω_1, et on a donc $\omega_2 = \aleph_2$, *etc.*

▷ *Il peut paraître stupide d'introduire deux notations distinctes, ici ω_1 et $\aleph_1$, pour le même objet. La redondance n'est pas si stupide, car elle aide à saisir le point de vue choisi : lorsqu'on parle de cardinalité, il est usuel d'utiliser $\aleph_1$, alors que, d'un point de vue de bons ordres et d'ordinaux, il est commode d'utiliser ω_1. Cette convention est en particulier utile pour développer l'arithmétique cardinale (section 2), où on utilise les mêmes symboles qu'en arithmétique ordinale, alors que les opérations sont distinctes. Loin de renoncer à cette redondance, on l'étend à tous les étages en posant :* ◁

Notation 1.18. (ordinal ω_α) Pour tout ordinal α, on note ω_α le cardinal $\aleph_\alpha$ — lorsqu'on souhaite le voir comme ordinal, et non comme représentant d'une classe d'équipotence.

2. Arithmétique cardinale

► On introduit les opérations d'addition, de multiplication et d'exponentiation cardinale dans le cas de deux facteurs, puis, pour les deux premières, dans le cas d'une famille quelconque de facteurs. On termine avec une brève étude de la notion de cardinal en l'absence de l'axiome du choix. ◄

▷ *Il convient d'insister dès maintenant sur le fait que, dans la cas des ensembles infinis, l'arithmétique cardinale est très différente de l'arithmétique ordinale définie au chapitre II, au point qu'il est surprenant d'utiliser les mêmes vocables et les mêmes symboles. En fait, les risques de confusion seront limités dès que le contexte est clair.* ◁

2.1. Addition, multiplication et exponentiation cardinales.

► On utilise les opérations d'union disjointe, de produit et de passage à l'ensemble des applications pour définir des opérations de somme, de produit, et d'exponentielle pour les cardinaux. ◄

▷ *Dans le cas fini, tout ordinal est un cardinal, et, avec la proposition 1.10, on a vérifié que les opérations de l'arithmétique ordinale ont le comportement souhaité vis-à-vis des dénombrements. Dans le cas infini, les opérations ordinales ne conviennent plus, et on utilise les relations de la proposition 1.10 comme définition.* ◁

Définition 2.1. (opérations cardinales) Pour κ, λ cardinaux, on pose

$$\kappa + \lambda := \mathrm{card}(\kappa \uplus \lambda),\ \ \kappa \cdot \lambda = \mathrm{card}(\kappa \times \lambda),\ \ \kappa^\lambda := \mathrm{card}({}^\lambda\kappa).$$

Il est immédiat de vérifier les relations analogues à (1.2) :

Proposition 2.2. (opérations cardinales) *Supposons* $\mathrm{card}(A) = \kappa$ *et* $\mathrm{card}(B) = \lambda$. *Alors on a*

$$\mathrm{card}(A \uplus B) = \kappa + \lambda, \quad \mathrm{card}(A \times B) = \kappa \cdot \lambda, \quad \mathrm{card}({}^BA) = \kappa^\lambda. \tag{2.1}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que, d'une façon générale, la conjonction de $A \approx A'$ et $B' \approx B$ entraîne $A \uplus B \approx A' \uplus B'$, $A \times B \approx A' \times B'$, et ${}^BA \approx {}^{B'}A'$. Or, soit f une bijection de A sur A' et g une bijection de B sur B'. Alors envoyer $(x, 1)$ sur $(f(x), 1)$ et $(y, 2)$ sur $(g(y), 2)$ définit une bijection de $A \uplus B$ sur $A' \uplus B'$. De même, envoyer (x, y) sur $(f(x), g(y))$ définit une bijection de $A \times B$ sur $A' \times B'$. Enfin, envoyer F sur F' définie par $F'(y) := f(F(g^{-1}(y)))$ définit une bijection de ${}^BA$ sur ${}^{B'}A'$. □

Corollaire 2.3. *Pour tout ensemble A, on a*

$$\mathrm{card}(\mathfrak{P}(A)) = 2^{\mathrm{card}(A)}. \tag{2.2}$$

En particulier, le cardinal de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc aussi de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$, est $2^{\aleph_0}$.

Démonstration. En associant à tout sous-ensemble X de A sa fonction indicatrice, c'est-à-dire la fonction $\mathbf{1}_X$ définie par $\mathbf{1}_X(x) = 1$ pour $x \in X$, et $\mathbf{1}_X(x) = 0$ pour $x \notin X$, on obtient une bijection de $\mathfrak{P}(A)$ sur $\{0,1\}^A$. □

Les opérations cardinales satisfont à diverses relations algébriques simples, ainsi qu'à des conditions de croissance.

Proposition 2.4. (identités) *Quels que soient les cardinaux κ, λ, μ, on a*

$$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu, \quad \kappa + 0 = 0 + \kappa = \kappa, \tag{2.3}$$

$$\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa,\ \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu,\ \kappa \cdot 0 = 0 \cdot \kappa = 0,\ \kappa \cdot 1 = 1 \cdot \kappa = \kappa, \tag{2.4}$$

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu, \quad \kappa + \kappa = \kappa \cdot 2, \tag{2.5}$$

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu,\ (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu},\ (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu,\ \kappa^1 = \kappa,\ \kappa^2 = \kappa \cdot \kappa. \tag{2.6}$$

Par ailleurs, si on a $\kappa \leqslant \kappa'$ et $\lambda \leqslant \lambda'$, alors on déduit

$$\kappa + \lambda \leqslant \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \leqslant \kappa' \cdot \lambda', \quad \text{et} \quad \kappa^\lambda \leqslant \kappa'^{\lambda'}. \tag{2.7}$$

Démonstration. Pour montrer une égalité entre ordinaux, il faut construire un isomorphisme d'ensembles ordonnés (*cf.* lemme 3.1); pour montrer une égalité entre cardinaux, il suffit de construire une bijection, ce qui est souvent plus facile. Les détails sont laissés au lecteur. □

▷ *Toutes les propriétés mentionnées jusqu'à présent sont triviales. Des résultats plus intéressants apparaissent à partir de la construction suivante d'une bijection entre les classes* **Ord** × **Ord** *et* **Ord**, *qui répond en particulier à la question I.1.12.* ◁

Proposition 2.5. (carré) *Pour tout ordinal α, on a $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.*

Démonstration. Pour $(\beta,\gamma), (\beta',\gamma')$ dans **Ord** × **Ord**, déclarons $(\beta,\gamma) \prec (\beta',\gamma')$ vrai si on a ou bien $\max(\beta,\gamma) < \max(\beta',\gamma')$, ou bien $\max(\beta,\gamma) = \max(\beta',\gamma')$ et $\gamma < \gamma'$, ou bien $\max(\beta,\gamma) = \max(\beta',\gamma')$ et $\gamma = \gamma'$ et $\beta < \beta$. Que $\prec$ soit un ordre total est clair.

On montre maintenant que $\prec$ est un bon ordre. Supposons que X est un ensemble non vide de couples d'ordinaux. Par remplacement, $\{\max(\beta,\gamma)\,;\,(\beta,\gamma) \in X\}$ est un ensemble ; soit μ son plus petit élément, et soit $Z := \{\gamma\,;\, \exists\beta\,((\beta,\gamma) \in X$ et $\max(\beta,\gamma) = \mu\}$. Alors Z est un ensemble non vide d'ordinaux. Soit $\gamma_\bullet$ son plus petit élément, et soit $Y := \{\beta\,;\,(\beta,\gamma_\bullet) \in X\}$. A nouveau, Y est non vide. Soit $\beta_\bullet$ son plus petit élément. Alors $(\beta_\bullet, \gamma_\bullet)$ est plus petit élément de X pour $\preccurlyeq$.

Pour chaque ordinal α, l'ensemble bien ordonné $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \prec\upharpoonright_{\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha})$ est isomorphe à un unique ordinal κ_α. Comme l'application $\beta \mapsto (\beta, 0)$ définit une injection croissante de $(\aleph_\alpha, <)$ dans $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \prec)$, on a nécessairement $\kappa_\alpha \geqslant \aleph_\alpha$. On montre maintenant l'inégalité réciproque $\kappa_\alpha \leqslant \aleph_\alpha$ par induction sur α. On suppose d'abord $\alpha = 0$, c'est-à-dire qu'on considère la restriction de $\prec$ aux couples d'entiers. Pour chaque couple d'entiers (p,q), il n'y a qu'un nombre fini de prédécesseurs pour (p,q), à savoir au plus $\max(p,q)^2$. Par conséquent, κ_0 est un ordinal dont tous les prédécesseurs sont finis, et on a donc $\kappa_0 \leqslant \omega$.

Supposons maintenant $\alpha \geqslant 1$. Soit (β,γ) un couple quelconque dans $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, et soit $\delta := \max(\beta,\gamma)$. Par définition, tous les $\preccurlyeq$-prédécesseurs (β',γ') de (β,γ) dans $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ vérifient

$\max(\beta', \gamma') \leqslant \delta < \aleph_\alpha$. Puisque $\aleph_\alpha$ est un cardinal, le cardinal de δ est strictement inférieur à $\aleph_\alpha$: on a donc $\mathrm{card}(\delta) = \aleph_\theta$ pour un certain θ vérifiant $\theta < \alpha$. Alors, utilisant l'hypothèse d'induction $\aleph_\theta \cdot \aleph_\theta = \aleph_\theta$, on obtient

$$\mathrm{card}(I_\prec((\beta, \gamma))) \leqslant \mathrm{card}(\delta \times \delta) \leqslant \aleph_\theta \cdot \aleph_\theta = \aleph_\theta < \aleph_\alpha.$$

L'ordinal κ_α a donc la propriété que tous ses segments initiaux sont de longueur strictement inférieure à $\aleph_\alpha$, et on a donc $\kappa_\alpha \leqslant \aleph_\alpha$. □

Corollaire 2.6. (i) *Pour tous α, β ordinaux, on a*

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta). \tag{2.8}$$

(ii) *Pour tous n entier et α ordinal, on a $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.*

Démonstration. Pour (i), supposons $\alpha \leqslant \beta$. Alors, en utilisant les relations de la proposition 2.4, on obtient $\aleph_\alpha + \aleph_\beta \leqslant \aleph_\beta + \aleph_\beta = \aleph_\beta \cdot 2 \leqslant \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$, et $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leqslant \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$. Le point (ii) s'en déduit en utilisant $n < \aleph_0$. □

Corollaire 2.7. *Pour tout ensemble A infini, et tout cardinal $\lambda \leqslant \mathrm{card}(A)$,*

$$\mathrm{card}(\{X \subseteq A\,;\, \mathrm{card}(X){=}\lambda\}) = \mathrm{card}(A)^\lambda. \tag{2.9}$$

Démonstration. Posons $S_\lambda := \{X \subseteq A\,;\, \mathrm{card}(X){=}\lambda\}$. Tout élément de S_λ admet une énumération comme image d'une suite de longueur λ d'éléments de A, et on obtient une injection de S_λ dans l'ensemble ${}^\lambda A$, d'où $\mathrm{card}(S_\lambda) \leqslant \mathrm{card}(A)^\lambda$.

Inversement, une application de λ dans A est un sous-ensemble de $\lambda \times A$ de cardinal λ. Par (2.8), il existe une bijection entre A et $\lambda \times A$, d'où

$$\mathrm{card}(A)^\lambda \leqslant \mathrm{card}(\{X \subseteq A \times \lambda\,;\, \mathrm{card}(X){=}\lambda\}) = \mathrm{card}(S_\lambda),$$

d'où $\mathrm{card}(A)^\lambda \leqslant \mathrm{card}(S_\lambda)$, et finalement l'égalité. □

2.2. Sommes et produits infinis.

► On passe à des versions infinies des opérations d'addition et de multiplication cardinale. ◄

▷ *Les résultats précédents montrent que l'addition et la multiplication de deux cardinaux sont des opérations triviales, puisqu'en fait elles coïncident avec l'opération* sup. *Par contre, on va voir que les versions infinies sont plus intéressantes. Comme les versions finies, les versions infinies se comportent bien vis-à-vis de l'équipotence — mais l'argument pour le vérifier est plus délicat. On va voir que le calcul des sommes généralisées est facile ; par contre celui des produits généralisés est beaucoup plus délicat, et on montrera seulement un résultat de comparaison, le théorème de König.*

La notation du produit peut sembler malencontreuse, puisque $\prod_{i\in I}$ désignera désormais à la fois un ensemble de suites et sa cardinalité ; dans la pratique, aucune ambiguïté ne naît de ces conventions. ◁

Définition 2.8. (opérations généralisés) Pour $(\kappa_i)_{i\in I}$ famille de cardinaux, on pose

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \mathrm{card}(\bigcup\nolimits_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}) \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} \kappa_i := \mathrm{card}(\prod_{i\in I} \kappa_i). \tag{2.10}$$

Proposition 2.9. (opérations généralisés) *Pour toute suite* $(A_i)_{i\in I}$*, on a*

$$\operatorname{card}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \operatorname{card}(A_i) \quad \textit{et} \quad \operatorname{card}(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \operatorname{card}(A_i), \tag{2.11}$$

les ensembles A_i *étant supposés disjoints dans le premier cas.*

Démonstration. Posons $\kappa_i := \operatorname{card}(A_i)$ pour chaque i. Par hypothèse, il existe pour chaque i une bijection f_i de A_i sur κ_i. L'axiome du choix garantit alors qu'il existe une suite $(f_i)_{i\in I}$ telle que f_i soit une telle bijection pour tout i : si I est fini, le résultat est évident, sinon, le problème est de choisir une bijection pour chaque i, ce qui, en notant $\operatorname{Bij}(A, B)$ l'ensemble des bijections de A sur B, revient à prendre un élément dans le produit des ensembles $\operatorname{Bij}(A_i, \kappa_i)$ dont chacun est supposé non vide. Une telle suite $(f_i)_{i\in I}$ étant fixée, il est facile de construire une bijection de $\bigcup_{i\in I} A_i$ sur $\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})$, et, de même, de $\prod_{i\in I} A_i$ sur $\prod_{i\in I} \kappa_i$. □

Corollaire 2.10. *Pour tous cardinaux* κ, λ*, on a*

$$\sum_{i\in\lambda} \kappa = \kappa \cdot \lambda \quad \textit{et} \quad \prod_{i\in\lambda} \kappa = \kappa^\lambda. \tag{2.12}$$

Le résultat suivant permet de calculer les sommes quelconques.

Proposition 2.11. (somme) *Soit* $(\kappa_i)_{i\in I}$ *une suite de cardinaux. Alors on a*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \max(\operatorname{card}(I), \sup_{i\in I} \kappa_i). \tag{2.13}$$

En particulier, pour $\operatorname{card}(I) \leqslant \sup_{i\in I} \kappa_i$*, on a* $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sup_{i\in I} \kappa_i$.

Démonstration. Notons d'abord que si, pour chaque i dans I, on a $\kappa_i \leqslant \kappa'_i$, alors on a $\sum_{i\in I} \kappa_i \leqslant \sum_{i\in I} \kappa'_i$. Posons $\kappa := \sup_{i\in I} \kappa_i$. Comme on a $\kappa_i \leqslant \kappa$ pour chaque i, on a

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leqslant \sum_{i\in I} \kappa = \operatorname{card}(I) \cdot \kappa = \max(\operatorname{card}(I), \kappa).$$

Inversement, on a $1 \leqslant \kappa_i$ pour chaque i, d'où $\operatorname{card}(I) = \sum_{i\in I} 1 \leqslant \sum_{i\in I} \kappa_i$. Par ailleurs, on a certainement $\kappa = \sup\{\kappa_i ; i \in I\} \leqslant \sum_{i\in I} \kappa_i$, d'où $\max(\operatorname{card}(I), \kappa) \leqslant \sum_{i\in I} \kappa_i$. □

Pour les produits quelconques, on a l'inégalité suivante :

Proposition 2.12. (théorème de König) *Soient* $(\kappa_i)_{i\in I}$ *et* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *deux suites de cardinaux vérifiant* $\kappa_i < \lambda_i$ *pour chaque* i*. Alors on a*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i. \tag{2.14}$$

Démonstration. Notons S l'ensemble $\bigcup_i(\kappa_i \times \{i\})$ et P l'ensemble $\prod \lambda_i$. On se propose de montrer $\operatorname{card}(S) < \operatorname{card}(P)$. D'abord, on obtient une injection de S dans P en envoyant chaque élément (α, i) sur la suite $f((\alpha, i))$ définie par $f((\alpha, i))(i) = \alpha$ et $f((\alpha, i))(j) = \kappa_j$ pour $j \neq i$ [5]. Il est clair qu'à la fois $\alpha \neq \beta$ et $i \neq j$ entraînent $f((\alpha, i)) \neq f((\beta, j))$. On a donc $\sum_{i\in I} \kappa_i \leqslant \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Soit maintenant $(P_i)_{i\in I}$ une suite quelconques de parties de P vérifiant $\operatorname{card}(P_i) \leqslant \kappa_i$ pour tout i. Par construction, la projection $\operatorname{pr}_i(P_i)$ de P_i sur λ_i est un sous-ensemble de λ_i dont le cardinal est au plus κ_i, donc certainement un sous-ensemble propre de λ_i. Alors l'axiome du

[5] soit encore, en notation « suite », la suite $(x_i)_{i\in I}$ vérifiant $x_i = \alpha$ et $x_j = \kappa_j$ pour $j \neq i$

choix garantit l'existence d'une suite $(x_i)_{i\in I}$ dans P telle que, pour chaque i, on a $x_i \notin \mathrm{pr}_i(P_i)$. Alors, par construction, la suite $(x_i)_{i\in I}$ n'est dans aucun P_i, et donc la réunion des P_i ne peut couvrir P. Par conséquent, on n'a pas $\sum_{i\in I}\kappa_i = \prod_{i\in I}\lambda_i$. □

▷ *On notera que le théorème de König (dont la démonstration recourt à un argument diagonal) étend le théorème de Cantor puisqu'on en déduit en particulier* $\sum_{\alpha<\kappa} 1 < \prod_{\alpha<\kappa} 2$, *soit* $\kappa < 2^\kappa$, *pour tout cardinal* κ. ◁

2.3. Cardinaux sans axiome du choix.

► On examine brièvement les questions de cardinaux dans le cas où l'axiome du choix n'est pas posé. On se borne ici à un aperçu restreint au théorème de Hartogs. ◄

▷ *Si l'axiome du choix n'est pas placé dans les hypothèses de départ, la théorie des cardinaux change radicalement, car, à côté des classes d'équipotence d'ensembles bien ordonnables, pour lesquelles la suite des alephs fournit des représentants distingués, peuvent apparaître des ensembles non bien ordonnables qu'il est difficile de comparer.*

Certains des résultats établis précédemment restent valables à condition qu'on les restreigne à des ensembles bien ordonnables, qui sont les seuls à être en bijection avec un ordinal. Par exemple, le corollaire 1.7 devient « Si A est un ensemble tel que A et $\mathfrak{P}(A)$ *sont bien ordonnables, alors on a* $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(A)) > \mathrm{card}(A)$ *». Noter que l'hypothèse que A est bien ordonnable ne garantit a priori rien pour* $\mathfrak{P}(A)$ *— de fait, on verra plus loin que rien ne garantit même la bonne ordonnabilité de* $\mathfrak{P}(\omega)$.

D'autres résultats comme la proposition 2.9 sont plus difficiles à étendre, parce que l'axiome du choix est utilisé dans la démonstration, et pas seulement dans l'hypothèse initiale que les ensembles dont on parle sont bien ordonnables. Ceci suggère que l'arithmétique des cardinaux sans AC *risque d'être beaucoup plus compliquée qu'avec.*

Le premier pas dans l'étude des cardinaux a été de choisir un représentant distingué dans chaque classe d'équipotence. Sans AC, *il n'y aucun problème à continuer à appeler cardinaux les ordinaux qui ne sont en bijection avec aucun ordinal plus petit. Mais, faute de disposer du théorème de Zermelo, on ne peut affirmer que tout ensemble est en bijection avec un tel cardinal. Par contre, grâce à l'axiome de fondation, on peut toujours définir, non pas un représentant, mais, au moins, un ensemble de représentants — et non pas une classe propre — en considérant les éléments de rang minimum dans chaque classe d'équipotence.* ◁

Définition 2.13. (cardinal généralisé) Pour tout ensemble A, on pose

$$\mathrm{card}(A) := \begin{cases} \inf\{\alpha\in\mathbf{Ord}\,;\,\alpha\approx A\} & \text{si } A \text{ est bien ordonnable},\\ \{X\in V_{\mathrm{rang}(A)}\,;\, X\approx A \text{ et } \forall Y\!\approx A\,(\mathrm{rang}(Y)\geqslant \mathrm{rang}(X))\} & \text{sinon,}\end{cases}$$

qu'on appelle le *cardinal généralisé* de A.

▷ *Quoique bizarrement hétérogène, cette définition offre l'avantage par rapport à l'option, également possible et plus homogène, de poser pour tout A*

$$\mathrm{card}^*(A) := \{X\in V_{\mathrm{rang}(A)}\,;\, X\approx A \text{ et } \forall Y\!\approx A\,(\mathrm{rang}(Y)\geqslant \mathrm{rang}(X))\}$$

qu'elle étend la définition classique : en présence de AC, *tout ensemble est bien ordonnable, et on retrouve la définition usuelle, et qu'il n'y a donc aucune ambiguïté à utiliser la même notation.*

On obtient ainsi une classe de cardinaux, qui contient tous les cardinaux qui sont des ordinaux (« cardinaux bien ordonnés »), mais aussi, si AC *est en défaut, d'autres cardinaux constitués d'ensembles non bien ordonnables. La notation traditionnelle pour ces cardinaux généralisés est l'alphabet gothique.* ◁

Proposition 2.14. (cardinal) (ZF) *Deux ensembles A, B sont en bijection si et seulement si on a* $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

Démonstration. Un ensemble en bijection avec un ensemble bien ordonnable est lui-même bien ordonnable. Par ailleurs, si A et B sont en bijection, les ensembles en bijection avec A sont les mêmes que les ensembles en bijection avec B, et il en est de même des ensembles de rang minimal parmi ceux-ci. □

▷ *Dans le cas des cardinaux bien ordonnés, le bon ordre des ordinaux induit directement un bon ordre sur les cardinaux. Sans* AC, *la comparaison des cardinaux est plus délicate, mais l'intuition recommande de garder la définition en termes d'injection : un ensemble est plus petit qu'un autre si on peut injecter le premier dans le deuxième.* ◁

Définition 2.15. (ordre) (ZF) Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ des cardinaux généralisés. On déclare $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ vrai s'il existe A de cardinal $\mathfrak{a}$ et B de cardinal $\mathfrak{b}$ tels qu'il existe une injection de A dans B.

Si on a $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, alors il existe une injection de A dans B pour tous A, B de cardinalités respectives $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

Proposition 2.16. (théorème de Cantor–Bernstein) *La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre (partiel) sur les cardinaux généralisés.*

Démonstration. Seule l'antisymétrie fait problème, et c'est ce qu'affirme le théorème de Cantor–Bernstein. On a donné de celui-ci une démonstration qui n'utilise pas l'axiome du choix, et le résultat est donc valable dans le contexte de ZF. □

▷ *A priori, il n'y a aucune raison pour que l'ordre des cardinaux soit total : si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas bien ordonnables, on peut n'avoir ni $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, ni $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$. Par contre, on pourra vérifier que la démonstration du lemme 1.11 n'utilise pas l'axiome du choix. Utilisant la notation $2^{\mathfrak{a}}$ pour le cardinal de $\mathfrak{P}(A)$ lorsque A est de cardinal A, et $\mathfrak{a}^2$ pour celui de $A \times A$, on peut réénoncer le résultat sous la forme suivante :* ◁

Proposition 2.17. (théorème de Hartogs) (ZF) *Pour tout cardinal généralisé $\mathfrak{a}$, il existe un plus petit cardinal θ vérifiant $\theta \nleqslant \mathfrak{a}$, et on a alors $\theta \leqslant 2^{2^{\mathfrak{a}^2}}$.*

Corollaire 2.18. (ZF) *L'axiome du choix est équivalent à l'énoncé « quels que soient les cardinaux généralisés $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, on a $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ ».*

Démonstration. Que AC implique que l'ordre des cardinaux généralisés est total est évident, puisqu'il implique que tout cardinal est un ordinal. Inversement, soit A un ensemble quelconque. Par le théorème de Hartogs, il existe un ordinal θ tel que $\theta \leqslant \mathrm{card}(A)$ est faux. Alors, si l'ordre des cardinaux est total, on doit avoir $\mathrm{card}(A) < \theta$, donc il existe une injection f de A dans l'ordinal θ. En transportant par f^{-1} le bon ordre de θ, on définit un bon ordre sur A. Par conséquent le théorème de Zermelo est vérifié, et donc AC également. □

3. Cofinalité

▶ On établit ici des résultats de base sur l'exponentiation des cardinaux et la fonction puissance, en utilisant la notion de cofinalité. On introduit l'hypothèse généralisée du continu, et on mentionne que, si cette dernière est vérifiée, le calcul de l'exponentielle se ramène à celui de la fonction puissance. ◀

▷ *Comme on l'a annoncé dès le chapitre I, l'une des questions principales de la théorie des ensembles est le calcul de l'exponentiation des cardinaux infinis, c'est-à-dire la détermination du cardinal* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ *de l'ensemble des applications d'un ensemble de cardinal* $\aleph_\beta$ *dans un ensemble de cardinal* $\aleph_\alpha$. *Cette question, qui se trouve au cœur de l'exploration de la notion d'infini, se révèle très difficile, et on se contentera ici de résultats préliminaires qui laissent de nombreux points ouverts.* ◁

3.1. Ensembles cofinaux.

► On introduit la notion de cofinalité d'un ensemble (bien) ordonné, et on montre que la cofinalité d'un ordinal α est toujours un cardinal inférieur ou égal à α. ◄

▷ *Considérons le cardinal* $\aleph_\omega$, *c'est-à-dire, par définition, la borne supérieure des cardinaux* $\aleph_n$ *pour* n *entier. L'application qui à chaque entier* n *associe le cardinal* $\aleph_n$ *n'est pas une bijection de* $\aleph_0$ *sur* $\aleph_\omega$, *mais elle a la propriété qu'aucun élément de* $\aleph_\omega$ *n'est plus grand que tous les éléments de son image. Cela signifie donc que le sous-ensemble dénombrable* $\{\aleph_n\,;\, n < \omega\}$ *de* $\aleph_\omega$ *va en un sens jusqu'au bout de l'ensemble* $\aleph_\omega$, *qui est pourtant non dénombrable. Dans cette situation, on dit que l'ensemble* $\{\aleph_n\,;\, n < \omega\}$, *ou, de façon équivalente, la suite* $(\aleph_n)_{n<\omega}$, *est* cofinal *dans* $\aleph_\omega$. ◁

Définition 3.1. (cofinal) (Figure 1) Si $\prec$ est un ordre total sur A, une partie B de A est dite *cofinale* dans $(A, \prec)$ si tout élément de A a un majorant dans B, c'est-à-dire si on a

$$\forall a{\in}A\ \exists b{\in}B\ (a \preccurlyeq b). \tag{3.1}$$

Une suite $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A est dite cofinale dans $(A, \prec)$ si son image $\{x_i\,;\, i \in I\}$ l'est, c'est-à-dire si on a $\forall a{\in}A\ \exists i{\in}I\ (a \preccurlyeq x_i)$.

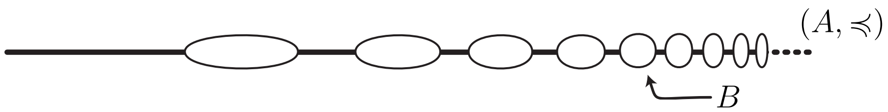

Figure 1. Ensemble cofinal dans un ensemble ordonné : B ne couvre pas nécessairement A, mais il va jusqu'au bout vers le haut (ici la droite).

Exemple 3.2. (cofinal) Trivialement, A est toujours cofinal dans $(A, \prec)$. Si $(A, \prec)$ a un plus grand élément a, alors $\{a\}$ est cofinal dans $(A, \prec)$. Les entiers sont cofinaux dans les rationnels, et dans les réels (munis des ordres usuels). Si κ est un cardinal, toute partie A de κ de cardinal κ est cofinale dans κ : en effet, dire que A n'est pas cofinale dans κ signifie qu'il existe $\beta < \kappa$ tel que $\alpha < \beta$ est vérifié pour tout α dans A, c'est-à-dire que A est inclus dans β, et on a alors $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(\beta) \leqslant \beta < \kappa$.

▷ *Dans le cas des bons ordres*[6], *comme tout sous-ordre d'un bon ordre est un bon ordre, on n'a à considérer que les sous-ensembles qui forment des bons ordres, et il est alors naturel d'introduire les ordinaux associés.* ◁

[6]En fait, tout ordre total possède des sous-ensembles cofinaux bien ordonnés, et on peut introduire de même la cofinalité de tout ensemble totalement ordonné, *cf.* exercice 2.

Définition 3.3. (cofinalité) Soit $(A, \prec)$ un ensemble bien ordonné. On appelle *cofinalité* de $(A, \prec)$, et on note $\mathrm{cf}(A, \prec)$ le plus petit ordinal θ tel que $(A, \prec)$ possède un sous-ensemble cofinal isomorphe à θ.

Exemple 3.4. (cofinalité) Dans le cas d'un ordinal α, on note $\mathrm{cf}(\alpha)$ pour $\mathrm{cf}(\alpha, \in)$. Si α est un ordinal successeur, soit $\alpha = \beta+1$, alors on a $\mathrm{cf}(\alpha) = 1$ puisque $\{\beta\}$ est un sous-ensemble cofinal dans $(\alpha, \in)$. D'un autre côté, on a $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$: un sous-ensemble fini de ω a un plus grand élément, donc ne peut être cofinal dans ω. De même, on a $\mathrm{cf}(\lambda) \geqslant \omega$ pour tout ordinal limite λ. Enfin, on a $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$: la suite $(\aleph_n)_{n\in\omega}$ est cofinale dans $\aleph_\omega$, ce qui donne $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) \leqslant \omega$, d'où l'égalité puisque $\aleph_\omega$ est un cardinal infini, donc certainement un ordinal limite.

La cofinalité d'un ordinal α est simplement la longueur minimale d'une suite d'ordinaux plus petits que α dont α soit le sup :

Lemme 3.5. *Pour tout ordinal α, l'ordinal $\mathrm{cf}(\alpha)$ est le plus petit ordinal θ tel qu'il existe une suite d'ordinaux $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ vérifiant $\alpha_\gamma < \alpha$ pour tout γ et $\alpha = \sup_{\gamma<\theta} \alpha_\gamma$, et c'est aussi le plus petit ordinal θ tel qu'il existe une telle suite qui, de surcroît, soit strictement croissante.*

Démonstration. Supposons que B est cofinal dans $(\alpha, <)$. Dire que $(B, <\restriction_B)$ est isomorphe à θ signifie qu'il existe une bijection f de θ sur B telle que $\beta < \gamma$ entraîne $f(\beta) < f(\gamma)$, c'est-à-dire que l'énumération croissante de B est une suite strictement croissante $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ de longueur θ. Donc $\mathrm{cf}(\alpha)$ est le plus petit ordinal θ tel qu'il existe une telle suite.

Par ailleurs, supposons que $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ est une suite, non nécessairement croissante, d'ordinaux plus petits que α. On peut en extraire une sous-suite strictement croissante $(\alpha'_\beta)_{\beta<\theta'}$ en définissant récursivement $\alpha'_\beta = \alpha_\gamma$ avec γ minimal vérifiant $\alpha_\gamma > \alpha'_\delta$ pour $\delta < \beta$. Par construction on a $\theta' \leqslant \theta$, et $\sup_{\gamma<\theta'} \alpha'_\gamma = \sup_{\gamma<\theta} \alpha_\gamma$, donc, si la suite initiale est cofinale dans α, la sous-suite extraite l'est aussi, et par conséquent $\theta \geqslant \mathrm{cf}(\alpha)$ entraîne $\theta' \geqslant \mathrm{cf}(\alpha)$. Donc, pour $\theta = \mathrm{cf}(\alpha)$, on a nécessairement $\theta' = \theta$: le plus petit θ pour lequel on a une suite cofinale de longueur θ est aussi le plus petit θ pour lequel on a une suite croissante cofinale de longueur θ. □

Proposition 3.6. (cofinalité) *Pour tout ordinal α, on a*

$$\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \alpha \quad \textit{et} \quad \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha), \tag{3.2}$$

et $\mathrm{cf}(\alpha)$ est un cardinal.

Démonstration. Tout ensemble est cofinal dans lui-même, et en particulier α est cofinal dans α, donc on a $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \alpha$ pour tout α. Remplaçant α par $\mathrm{cf}(\alpha)$, on déduit $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$.

D'un autre côté, si B est cofinal dans A et C cofinal dans B, alors C est cofinal dans A, ce qui, par définition, implique que $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$ est cofinal dans α, d'où l'inégalité $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$, et, d'après ce qui précède, l'égalité.

Il en résulte que $\mathrm{cf}(\alpha)$ est toujours un ordinal β vérifiant $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$. Or supposons que β est un ordinal qui n'est pas un cardinal. Cela signifie qu'il existe $\theta < \beta$ et une surjection f de θ sur β. Alors la suite $(f(\gamma))_{\gamma<\theta}$, qui est une énumération de β, est cofinale dans β, et, par le lemme 3.5, on déduit $\mathrm{cf}(\beta) \leqslant \theta < \beta$, et donc en particulier $\mathrm{cf}(\beta) \neq \beta$. Par conséquent, $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$ implique que β est un cardinal. □

Corollaire 3.7. *Pour tout ordinal limite λ, on a $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cf}(\lambda)$.*

Démonstration. Par définition, on a $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha\,;\,\alpha < \lambda\}$. Si $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ est une suite croissante cofinale dans λ, alors $(\aleph_{\alpha_\gamma})_{\gamma<\theta}$ est une suite croissante cofinale dans $\aleph_\lambda$, et on a donc $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) \leqslant \mathrm{cf}(\lambda)$. Inversement, supposons que $(\beta_\gamma)_{\gamma<\theta}$ est croissante cofinale dans $\aleph_\lambda$. On obtient une suite $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ cofinale dans λ en définissant α_γ par $\aleph_{\alpha_\gamma} = \mathrm{card}(\beta_\gamma)$, et on déduit $\mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \mathrm{cf}(\aleph_\lambda)$ par le lemme 3.5. □

Les critères suivants, souvent utiles dans les applications, sont des conséquences directes des définitions :

Proposition 3.8. (critères) *Supposons $\theta < \mathrm{cf}(\kappa)$ avec κ cardinal infini.*

(i) Si $(X_\alpha)_{\alpha<\theta}$ est une suite de parties de κ vérifiant $\mathrm{card}(X_\alpha) < \kappa$ pour tout α, alors $\bigcup_{\alpha<\theta} X_\alpha$ n'est pas cofinal dans κ.

(ii) Pour toute application f de κ dans θ, il existe au moins une valeur α telle que $f^{-1}(\alpha)$ a pour cardinal κ.

(iii) Toute application f non décroissante de κ dans θ est finalement constante.

Démonstration. (i) L'hypothèse $\mathrm{card}(X_\alpha) < \kappa$ implique $\sup X_\alpha < \kappa$. Ensuite l'hypothèse $\theta < \mathrm{cf}(\kappa)$ implique que la suite $(\sup X_\alpha)_{\alpha<\theta}$ n'est pas cofinale dans κ, et il existe donc $\beta < \kappa$ tel qu'on ait $\sup X_\alpha < \beta$ pour tout α, et, de là, $\gamma < \beta$ pour tout γ dans $\bigcup_\alpha X_\alpha$.

Le point (ii) résulte de (i) en posant $X_\alpha := f^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha < \theta$: si on a $\mathrm{card}(X_\alpha) < \kappa$ pour tout α, alors $\mathrm{Dom}(f)$, qui est $\bigcup_\alpha X_\alpha$, ne peut couvrir κ.

Pour (iii), l'application de (ii) garantit l'existence de α vérifiant $\mathrm{card}(f^{-1}(\alpha)) = \kappa$. Soit alors $\beta = \inf f^{-1}(\alpha)$. Puisque f est non décroissante, $\gamma \geqslant \beta$ entraîne $f(\gamma) \geqslant f(\beta) = \alpha$. Par ailleurs, puisque κ est un cardinal, on a vu dans l'exemple 3.2 que $f^{-1}(\alpha)$ doit être cofinal dans κ, donc, pour tout γ dans κ, il existe $\delta \geqslant \gamma$ satisfaisant $f(\delta) = \alpha$, et on a donc $f(\gamma) \leqslant f(\delta) = \alpha$. Finalement on obtient $f(\gamma) = \alpha$ pour tout $\gamma \geqslant \beta$. □

3.2. Cardinaux réguliers et singuliers.

► On définit les cardinaux réguliers et les cardinaux singuliers, et on montre que tout cardinal successeur est régulier. ◄

▷ *A l'opposé des cardinaux finis, les cardinaux infinis forment une suite hétérogène où plusieurs espèces distinctes cohabitent. On a déjà distingué les cardinaux successeurs, tels $\aleph_1$ ou $\aleph_{\omega+1}$, des cardinaux limites, tels $\aleph_0$ ou $\aleph_\omega$. La cofinalité permet de distinguer deux nouvelles espèces de cardinaux, les cardinaux réguliers qui ne peuvent pas être approchés par une suite cofinale de longueur plus petite qu'eux-mêmes, et les cardinaux singuliers qui, sur le modèle de $\aleph_\omega$, admettent des suites cofinales de petite longueur, ici par exemple la suite $(\aleph_n)_{n<\omega}$: tout en étant des cardinaux, c'est-à-dire ne pouvant être mis en bijection avec un ordinal plus petit, les cardinaux singuliers peuvent être approchés par en-dessous au moyen d'une suite relativement courte. On pourrait penser que des phénomènes de continuité vont rendre l'étude des cardinaux singuliers aisée : ce n'est que très rarement le cas et, au contraire, le cas des cardinaux singuliers est souvent le plus délicat, notamment pour tout ce qui concerne les fonctions exponentiation et puissance.* ◁

Définition 3.9. (régulier, singulier) Un cardinal infini κ est dit *régulier* si on a $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$; il est dit *singulier* si on a $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

Ainsi, $\aleph_0$ est un cardinal régulier, alors que $\aleph_\omega$ est singulier. Une application directe de la proposition 3.6 donne :

Corollaire 3.10. *Pour tout ordinal α, l'ordinal $\mathrm{cf}(\alpha)$ est un cardinal régulier.*

PROPOSITION 3.11. (successeur) *Tout cardinal successeur est régulier.*

DÉMONSTRATION. Supposons $\kappa = \lambda^+$. Supposons que $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\theta}$ est une suite strictement croissante sous κ indexée par $\theta < \kappa$, et soit $\gamma = \sup_{\alpha<\theta} \gamma_\alpha$. On veut montrer qu'une telle suite n'est pas cofinale dans κ, c'est-à-dire qu'on a nécessairement $\gamma < \kappa$. Or, par hypothèse, on a $\mathrm{card}(\gamma_\alpha) \leqslant \lambda$ pour chaque α, et, d'autre part, $\mathrm{card}(\theta) \leqslant \lambda$. Par les propositions 2.5 et 2.9, on déduit

$$\mathrm{card}(\gamma) = \mathrm{card}(\sup_{\alpha<\theta} \gamma_\alpha) \leqslant \sum_{\alpha<\theta} \mathrm{card}(\gamma_\alpha) \leqslant \sum_{\alpha<\theta} \lambda = \mathrm{card}(\theta) \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda = \lambda < \kappa,$$

d'où $\gamma < \kappa$ puisque κ est un cardinal. □

QUESTION 3.12. *Existe-t-il des cardinaux limites réguliers?*

▷ *En vertu de la proposition 3.11, les cardinaux $\aleph_1, \aleph_2$, etc. sont tous réguliers*[7]*, et les cardinaux singuliers ne peuvent se trouver que parmi les cardinaux limites, tels $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+\omega}$ ou $\aleph_{\omega_1}$. Maintenant, le corollaire 3.7 implique que, si λ est un ordinal limite vérifiant $\lambda < \aleph_\lambda$, alors $\aleph_\lambda$ est singulier. Donc, s'il en existe, les cardinaux limites réguliers ne peuvent se trouver que parmi ceux qui vérifient $\lambda = \aleph_\lambda$, c'est-à-dire les points fixes de la fonction $\aleph$. Il est facile de voir que cette condition nécessaire n'est pas suffisante : par exemple, soit $\lambda := \sup\{\aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \dots\}$. Alors λ satisfait $\aleph_\lambda = \lambda$, mais λ est de cofinalité ω, donc est singulier. On peut recommencer même raisonnement avec les cardinaux λ vérifiant la condition : λ est le λ-ème point fixe de la fonction $\aleph$, et ainsi de suite, sans répondre à la question 3.12.* ◁

3.3. La fonction puissance.

► On établit quelques contraintes portant sur la fonction puissance des cardinaux. ◄

▷ *Avec le corollaire 2.6 on a obtenu des formules très simples pour l'addition et la multiplication des cardinaux infinis. Le cas de l'exponentiation est beaucoup plus délicat, et, sauf à introduire des hypothèses supplémentaires, il n'existe pas de formule simple. On examine ici le cas de la fonction puissance, c'est-à-dire la fonction $\kappa \mapsto 2^\kappa$, dont on verra qu'il est très lié à la fonction exponentiation des cardinaux infinis.* ◁

LEMME 3.13. *Pour tout cardinal $\kappa \geqslant 2$ et tout cardinal infini λ, on a*

$$\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda. \tag{3.3}$$

DÉMONSTRATION. Soit $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\theta}$ une suite (croissante) dans κ^λ. Si on suppose $\mathrm{card}(\theta) \leqslant \lambda$, alors, par le théorème de König (proposition 2.12), on obtient

$$\mathrm{card}(\sup_{\alpha<\theta} \gamma_\alpha) \leqslant \sum_{\alpha<\theta} \mathrm{card}(\gamma_\alpha) < \prod_{\alpha<\theta} \mathrm{card}(\kappa^\lambda) = (\kappa^\lambda)^{\mathrm{card}(\theta)} = \kappa^{\lambda\cdot\mathrm{card}(\theta)} \leqslant \kappa^\lambda,$$

d'où $\sup_{\alpha<\theta} \gamma_\alpha < \kappa^\lambda$. Donc une suite de longueur au plus λ ne peut pas être cofinale dans κ^λ, et, par conséquent, on a (3.3). □

PROPOSITION 3.14. (contraintes) *(i) La fonction $\kappa \mapsto 2^\kappa$ est non décroissante, et, pour tout cardinal κ infini, on a $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.*

(ii) (Figure 2) Si κ est un cardinal singulier, et qu'il existe $\kappa_0 < \kappa$ tel qu'on ait $2^\gamma = \lambda$ pour tout γ vérifiant $\kappa_0 \leqslant \gamma < \kappa$, alors on a $2^\kappa = \lambda$.

---

[7] A cause de l'utilisation de la proposition 2.9, le calcul de la démonstration précédente requiert l'axiome du choix ; en l'absence de celui-ci, la démonstration ne serait pas valide, et, de fait, le résultat lui-même pourrait être en défaut.

Démonstration. (i) Il est clair que $\kappa \leqslant \lambda$ entraîne $2^\kappa \leqslant 2^\lambda$ puisqu'une injection de A dans B donne naissance à une injection de $\mathfrak{P}(A)$ dans $\mathfrak{P}(B)$. Le second point résulte du lemme 3.13 avec $\kappa = 2$.

(ii) Soit $\theta = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Par hypothèse, il existe une suite $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\theta}$ cofinale dans κ. On a certainement $\gamma_\alpha \geqslant \kappa_0$ à partir d'un certain rang, et, quitte à ôter les premiers termes, on peut supposer $\gamma_\alpha \geqslant \kappa_0$ pour tout α. Par ailleurs, quitte à répéter des termes, on peut supposer $\theta \geqslant \kappa_0$. On trouve alors

$$2^\kappa = 2^{\sup_{\alpha<\theta}\gamma_\alpha} \leqslant 2^{\sum_{\alpha<\theta}\gamma_\alpha} = \prod_{\alpha<\theta} 2^{\gamma_\alpha} = \prod_{\alpha<\theta} \lambda = \lambda^\theta = (2^\theta)^\theta = 2^{\theta\cdot\theta} = 2^\theta = \lambda,$$

en utilisant l'identité $2^{\sum \kappa_i} = \prod 2^{\kappa_i}$ qui résulte, pour des ensembles A_i disjoints de l'existence d'une bijection entre $\mathfrak{P}(\bigcup A_i)$ et $\prod \mathfrak{P}(A_i)$, et, plus généralement, entre ${}^{(\bigcup A_i)}X$ et $\prod {}^{A_i}X$, bijection consistant à décomposer une application f de $\bigcup A_i$ dans X en la suite $(f{\restriction}_{A_i})_i$. $\square$

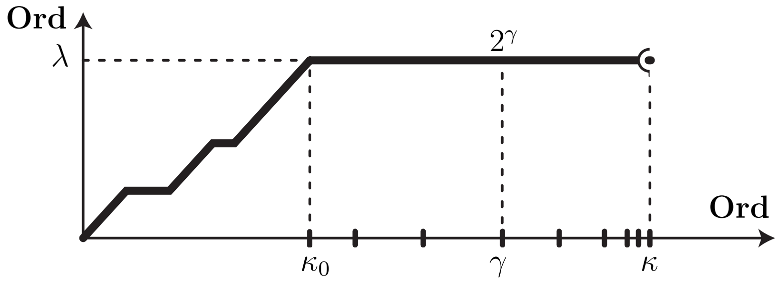

Figure 2. Si la fonction puissance est finalement constante sous un cardinal singulier κ, alors elle est continue en ce cardinal.

▷ *La proposition 3.14 entraîne que, pour tout λ, on a $\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda$, donc a fortiori $2^\lambda > \lambda$, mais elle donne des informations supplémentaires sur les valeurs possibles : par exemple, il est impossible que $2^{\aleph_0}$ (la cardinalité de $\mathbb{R}$) soit $\aleph_\omega$, puisque ce dernier cardinal est de cofinalité $\aleph_0$; par contre $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ n'est pas a priori impossible. On verra plus loin qu'en un certain sens la proposition 3.14(i) énonce les seuls résultats démontrables à partir des axiomes de* ZFC *pour la valeur de 2^κ lorsque κ est régulier.* ◁

Les relations précédentes sont loin de déterminer les valeurs de la fonction puissance complètement. On introduit à titre d'hypothèse de travail les énoncés suivants.

Définition 3.15. (hypothèse du continu) On appelle *hypothèse du continu* l'assertion

(HC) $$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

On appelle *hypothèse du continu généralisée* l'assertion

(HCG) pour tout cardinal infini κ, on a $2^\kappa = \kappa^+$,

c'est-à-dire encore $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pour tout α.

Question 3.16. *L'hypothèse du continu, et l'hypothèse du continu généralisée sont-elles vraies ?*

▷ *Le théorème de Cantor implique* $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$ *et, plus généralement,* $2^{\aleph_\alpha} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$ *pour tout* α, *donc l'hypothèse du continu et l'hypothèse du continu généralisée affirment que la fonction puissance prend les plus petites valeurs compatibles avec cette borne inférieure. Noter que ces valeurs sont également compatibles avec les contraintes de la proposition 3.14.*

Comprendre la fonction puissance et, en particulier, élucider le statut de HC *et de* HCG, *a été, et continue d'être, un des principaux moteurs du développement de la théorie des ensembles. On y reviendra plusieurs fois dans la suite. Notons pour le moment qu'à la différence des cas de l'axiome de l'infini, des axiomes de remplacement, ou même de l'axiome du choix, il ne semble exister aucune évidence intuitive ni en faveur, ni en défaveur de* HC *ou* HCG. ◁

3.4. Exponentiation cardinale.

▶ On établit des formules de calcul générales reliant l'exponentiation cardinale à la fonction puissance, et on en déduit une détermination complète de l'exponentiation dans le cas où HCG est supposée vraie. ◀

▷ *N'ayant pu établir que des résultats très partiels sur la fonction puissance, on ne peut espérer mieux pour la fonction exponentielle générale qui l'étend. En fait, on peut montrer que, dans tous les cas, les valeurs de l'exponentielle, fonction de deux variables, sont entièrement déterminées par celles de la fonction à une variable* $\gimel$ *définie par* $\gimel(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. *On se contentera ici du cas simple où l'hypothèse généralisée du continu est posée comme hypothèse.* ◁

Proposition 3.17. (exponentiation) *Soient* κ, λ *des cardinaux non nuls.*
(i) *Pour* $\kappa \geqslant 2$ *et* $\lambda \geqslant \aleph_0$, *l'inégalité* $\kappa \leqslant \lambda$ *entraîne* $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.
(ii) (formule de Hausdorff) *Pour* $\kappa \geqslant \aleph_0$ *et* $\lambda \geqslant 1$, *on a* $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$.
(iii) *Pour tout* n *entier, on a* $\aleph_n^\lambda = \aleph_n \cdot 2^\lambda$.

Démonstration. (i) D'un côté, $\kappa \geqslant 2$ entraîne $\kappa^\lambda \geqslant 2^\lambda$. De l'autre, on a $\kappa < 2^\kappa$, donc *a fortiori* $\kappa \leqslant 2^\kappa$ et $\kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda$, d'où $\kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\cdot\lambda} = 2^\lambda$ par la proposition 2.4.

(ii) Pour λ fini, $(\kappa^+)^\lambda$ et $\kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$ sont égaux à κ^+.

Supposons $\aleph_0 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$. On a $(\kappa^+)^\lambda \geqslant \kappa^\lambda$ et $(\kappa^+)^\lambda \geqslant \kappa^+$, donc $(\kappa^+)^\lambda \geqslant \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$. Inversement, puisque κ^+ est régulier, toute application de λ dans κ^+ est bornée, et l'ensemble $(\kappa^+)^\lambda$ est la réunion des ensembles α^λ pour $\alpha < \kappa^+$. Le cardinal d'un tel α est au plus κ, et on obtient donc

$$(\kappa^+)^\lambda = \mathrm{card}(\bigcup_{\alpha<\kappa^+} \alpha^\lambda) \leqslant \sum_{\alpha<\kappa^+} \mathrm{card}(\alpha)^\lambda \leqslant \sum_{\alpha<\kappa^+} \kappa^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda.$$

Enfin, pour $\lambda \geqslant \kappa^+$, on a $\kappa^\lambda = (\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda$ et $\kappa^+ \leqslant \lambda < 2^\lambda$, d'où $\kappa^+ \cdot \kappa^\lambda = 2^\lambda$.

(iii) Induction sur n. Pour $n = 0$, le résultat est trivial pour λ fini, et, pour λ infini, le point (i) donne $\aleph_0^\lambda = 2^\lambda = 2^\lambda \cdot \aleph_0$. Pour $n \geqslant 1$, on utilise l'hypothèse d'induction et la formule de Hausdorff: $\aleph_n^\lambda = \aleph_n \cdot \aleph_{n-1}^\lambda = \aleph_n \cdot \aleph_{n-1} \cdot 2^\lambda = \aleph_n \cdot 2^\lambda$. □

Proposition 3.18. (exponentiation) (HCG) *Soient* κ *un cardinal infini et* λ *un cardinal non nul. Alors on a*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \textit{pour } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa), \\ \kappa^+ & \textit{pour } \mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa, \\ \lambda^+ & \textit{pour } \lambda \geqslant \kappa. \end{cases} \tag{3.4}$$

Démonstration. Supposons $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Par (2.9), κ^λ est le cardinal de l'ensemble S des parties de κ de cardinal λ. L'hypothèse $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ entraîne qu'aucun élément de S n'est cofinal dans κ, et on a donc $S \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa}\mathfrak{P}(\alpha)$. Or, pour $\alpha < \kappa$, on a $\mathrm{card}(\alpha) < \kappa$, et, en appliquant HCG, $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(\alpha)) = 2^{\mathrm{card}(\alpha)} = \mathrm{card}(\alpha)^+ \leqslant \kappa$, d'où

$$\kappa^\lambda = \mathrm{card}(S) \leqslant \sum_{\alpha<\kappa} \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\alpha)) \leqslant \sum_{\alpha<\kappa} \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

Comme $\lambda \geqslant 1$ implique $\kappa^\lambda \geqslant \kappa$ trivialement, on a $\kappa^\lambda = \kappa$.

Supposons maintenant $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa$. Par la proposition 3.17, on a $\kappa^\kappa = 2^\kappa$, et, en appliquant HCG en κ, on obtient $\kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$, ce qui montre que κ^λ est ou bien κ, ou bien κ^+. Or le lemme 3.13 implique $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, d'où $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) \neq \mathrm{cf}(\kappa)$ et donc $\kappa^\lambda \neq \kappa$. Donc $\kappa^\lambda = \kappa^+$ est la seule possibilité.

Supposons enfin $\lambda \geqslant \kappa$. Alors la proposition 3.17 et HCG donnent $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$. □

Si κ est régulier, on a $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, et donc (3.4) se réduit à la dichotomie

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{pour } \lambda < \kappa, \\ \lambda^+ & \text{pour } \lambda \geqslant \kappa, \end{cases} \tag{3.5}$$

valable dès que HCG est satisfaite.

4. Combinatoire sur ω_1

▶ On établit quelques résultats sur la combinatoire de l'ordinal non dénombrable ω_1, autour des notions d'ensemble clos cofinal et d'ensemble stationnaire, avec en particulier le théorème de Fodor. On applique ensuite ces résultats à la démonstration du théorème de Silver qui affirme une sorte de continuité de l'hypothèse du continu généralisée en $\aleph_{\omega_1}$. ◀

▷ *La combinatoire des ensembles non dénombrables se révèle très différente de celle des ensembles dénombrables. Dans cette section, on considère le cas de l'ordinal ω_1, dont on rappelle qu'il est défini comme le plus petit ordinal non dénombrable. La plupart des résultats s'étendent à d'autres cardinaux non dénombrables, mais le cas de ω_1 est suffisant pour établir le contraste avec ω.*

Techniquement, le point essentiel est qu'à la différence de ω dont tous les éléments sont de même type, l'ordinal ω_1 contient des éléments de types différents: ordinaux successeurs, ordinaux limites, ordinaux limites de limites, etc. Cette hétérogénéité correspond au fait que, dans ω_1 muni de la topologie de l'ordre, il existe des points isolés et des points d'accumulation d'ordres variés (au sens de la démonstration du théorème de Cantor-Bendixson au chapitre II), et elle mène à des résultats combinatoires qui n'ont pas de contrepartie pour ω, notamment le théorème de Fodor .

Dans toute la suite, on emploie « dénombrable » pour « au plus dénombrable », c'est-à-dire « fini ou dénombrable ». On rappelle que ω_1 et $\aleph_1$ sont deux noms du même objet, mais que l'usage est d'utiliser ω_1 pour l'ordinal en tant qu'objet, et $\aleph_1$ pour le cardinal en tant que représentant d'une classe d'équipotence. ◁

4.1. Ensembles clos cofinaux.

▶ On introduit la notion de sous-ensemble clos cofinal de ω_1, et on montre diverses propriétés de clôture, à savoir des résultats affirmant que toute intersection de clos cofinaux d'un certain type est encore un clos cofinal. ◀

On rappelle qu'une partie C de ω_1 est dite *cofinale* (dans ω_1) si tout ordinal dans ω_1, c'est-à-dire tout ordinal fini ou dénombrable, a un majorant dans C [8].

Définition 4.1. (clos) Une partie C de ω_1 est dite *close* si elle est fermée pour la topologie de l'ordre sur ω_1, c'est-à-dire si, pour toute suite croissante $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ dans C, la limite $\sup_{n<\omega} \alpha_n$ est dans C.

Exemple 4.2 (clos cofinaux). Les ordinaux limites forment une partie close cofinale dans ω_1 : en effet, une limite d'ordinaux limites est nécéssairement un ordinal limite, et tout ordinal dénombrable α est majoré par un ordinal limite dénombrable, par exemple $\alpha + \omega$.

Lemme 4.3. *La famille des sous-ensembles clos cofinaux de ω_1 est close par intersection finie ou dénombrable: si $(C_n)_{n<\omega}$ est une suite de clos cofinaux dans ω_1, alors $\bigcap_{n<\omega} C_n$ est clos cofinal dans ω_1.*

Démonstration. Il est trivial que toute intersection de sous-ensembles clos est close. Le point est de montrer le caractère cofinal. On commence par le cas de deux clos cofinaux C_1, C_2. Soit α quelconque dans ω_1. On définit récursivement une suite d'ordinaux $(\alpha_n)_{n<\omega}$ en posant $\alpha_0 := \inf\{\gamma \in C_1 ; \gamma \geqslant \alpha\}$, puis $\alpha_{n+1} := \inf\{\gamma \in C_2 ; \gamma \geqslant \alpha_n\}$ pour n impair, et $\alpha_{n+1} := \inf\{\gamma \in C_1 ; \gamma \geqslant \alpha_n\}$ pour n pair. Soit $\beta := \sup \alpha_n$. Comme ω_1 est régulier, c'est-à-dire de cofinalité ω_1, la suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ ne peut pas être cofinale dans ω_1, et β est élément de ω_1 [9]. Comme β est aussi $\sup \alpha_{2n+1}$, il appartient à C_1. De même, comme β est aussi $\sup \alpha_{2n}$, il appartient à C_2. Finalement β est un élément de $C_1 \cap C_2$ plus grand que α.

Soit maintenant $(C_n)_{n<\omega}$ une suite de clos cofinaux de ω_1. Pour chaque entier n, on pose $C'_n = \bigcap_{k\leqslant n} C_k$. D'après ce qui précède, chaque ensemble C'_n est clos cofinal. Soit α un ordinal quelconque. On définit récursivement une suite d'ordinaux $(\alpha_n)_{n<\omega}$ en posant $\alpha_0 := \inf\{\gamma \in C'_0 ; \gamma \geqslant \alpha\}$, puis $\alpha_{n+1} := \inf\{\gamma \in C'_{n+1} ; \gamma \geqslant \alpha_n\}$. Soit $\beta := \sup \alpha_n$. Comme ci-dessus, on a $\beta < \omega_1$. Soit n un entier quelconque. La suite des ensembles C'_k est décroissante vis-à-vis de l'inclusion, donc $k \geqslant n$ entraîne $\alpha_k \in C'_n$. Comme C'_n est clos, on déduit $\beta \in C'_n$ pour chaque n, et β est un élément de $\bigcap C'_n$, donc de $\bigcap C_n$, et on a $\beta \geqslant \alpha$ par construction. □

Il en résulte que la famille des clos cofinaux de ω_1 est la base d'un filtre dénombrablement complet sur ω_1 : si F est l'ensemble des sous-ensembles de ω_1 incluant (au moins) un clos cofinal, alors F est un filtre sur ω_1, et il est clos non seulement par intersection finie, mais même par intersection dénombrable.

▷ *Le lemme 4.3 est optimal : la famille des clos cofinaux de ω_1 n'est pas close par intersection de cardinal $\aleph_1$ puisque, si on pose $C_\alpha := [\alpha, \omega_1[$ pour $\alpha < \omega_1$, alors C_α est clos cofinal pour tout α, et $\bigcap_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ est vide, donc non clos cofinal. Pourtant, on peut encore énoncer un résultat de clôture pour les intersections de cardinal ω_1, à condition d'affaiblir la notion d'intersection de façon convenable. Pour cela, on introduit une sorte d'intersection variable où les éléments de plus en plus grands doivent appartenir à de plus en plus d'ensembles.* ◁

[8] donc encore si on a $\bigcup C = \omega_1$, c'est-à-dire si C va jusqu'au bout de ω_1

[9] c'est ici que les choses diffèrent du cas de $\aleph_0$; les résultats seraient similaires pour tout ordinal de cofinalité non dénombrable

DÉFINITION 4.4. (intersection diagonale) Soit $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ une suite de sous-ensembles de ω_1. L'*intersection diagonale* de la famille est l'ensemble défini par

$$\triangle_{\alpha<\omega_1} X_\alpha := \{\gamma\,;\, \forall\alpha{<}\,\gamma\,(\gamma \in X_\alpha)\}. \tag{4.1}$$

Par exemple, on a $\triangle_{\alpha<\omega_1}[\alpha,\omega_1[\; = \{\gamma \in \omega_1\,;\, \forall\alpha{<}\,\gamma\,(\gamma \in [\alpha,\omega_1[)\} = \omega_1$, à comparer avec $\bigcap_{\alpha<\omega_1}[\alpha,\omega_1[= \emptyset$.

LEMME 4.5. *Les clos cofinaux de ω_1 sont clos par intersection diagonale : si $(C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ est une suite de clos cofinaux dans ω_1, alors $\triangle_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ est clos cofinal dans ω_1.*

DÉMONSTRATION. Soit $(C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ une suite de clos cofinaux, et soit $C := \triangle_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Soit $(\theta_n)_{n<\omega}$ une suite strictement croissante d'éléments de C, et soit $\theta := \sup\theta_n$. On veut montrer que θ est dans C. Soit $\alpha < \theta$. Il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $\alpha < \theta_n$. Alors, pour $n \geqslant n_0$, on a $\theta_n \in C_\alpha$, d'où $\theta \in C_\alpha$ puisque C_α est clos. On déduit $\theta \in C$, et donc C est clos.

Soit maintenant $\alpha < \omega_1$ quelconque. On veut montrer que C contient un majorant de α. Pour cela, on définit récursivement une suite $(\theta_n)_{n<\omega}$ en posant $\theta_0 := \alpha$ et $\theta_{n+1} := \inf\{\theta \in \bigcap_{\alpha<\theta_n} C_\alpha\,;\, \theta > \theta_n\}$. Inductivement, θ_n est un ordinal dénombrable, et, par conséquent, par le lemme 4.3, $\bigcap_{\alpha<\theta_n} C_\alpha$ est clos cofinal, donc θ_{n+1} existe et la construction se poursuit. Posons $\theta := \sup\theta_n$. Alors on a $\theta < \omega_1$ puisque ω_1 n'est pas de cofinalité dénombrable, et $\theta \geqslant \alpha$ par construction. Il reste à voir que θ est dans C. Soit $\alpha < \theta$. Alors il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on a $\theta_n > \alpha$, donc $\theta_{n+1} \in C_\alpha$. Comme C_α est clos, on déduit $\theta \in C$, ce qui montre que C est cofinal. □

4.2. Ensembles stationnaires.

► On introduit les sous-ensembles stationnaires de ω_1, et on établit le théorème de Fodor sur les fonctions régressives. ◄

▷ *Les sous-ensembles clos cofinaux de ω_1 doivent être vus comme des sous-ensembles gros. On introduit maintenant une famille d'ensembles dits stationnaires qui correspondent à une taille, ou plutôt une densité, intermédiaire. En particulier, tous les clos cofinaux sont stationnaires, mais la réciproque est fausse, et le complémentaire d'un stationnaire peut être également stationnaire.* ◁

DÉFINITION 4.6. (stationnaire) Un sous-ensemble S de ω_1 est dit *stationnaire* s'il rencontre tout clos cofinal, c'est-à-dire si on a $S \cap C \neq \emptyset$ pour tout clos cofinal C.

Comme l'intersection de deux clos cofinaux est un clos cofinal, donc n'est jamais vide, tout clos cofinal et, plus généralement, tout ensemble incluant un clos cofinal, est stationnaire. Mais, à l'inverse, il existe des stationnaires n'incluant aucun clos cofinal (*cf.* exercice 4). La première remarque est qu'un ensemble stationnaire ne peut être dénombrable :

LEMME 4.7. *Toute partie stationnaire de ω_1 est cofinale dans ω_1 et a pour cardinal $\aleph_1$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha < \omega_1$. Alors $[\alpha,\omega_1[$ est un clos cofinal, et donc un ensemble inclus dans son complémentaire $[0,\alpha[$ ne peut être stationnaire. Comme ω_1 est un cardinal, tout sous-ensemble cofinal de ω_1 est en bijection avec ω_1. □

▷ *Comme l'ordre des ordinaux est un bon ordre, quel que soit l'ordinal θ, il ne peut exister de fonction $f : \theta \to \theta$ vérifiant $f(\alpha) < \alpha$ pour tout α. En effet, à partir d'une telle fonction, on obtiendrait une suite infinie décroissante $\alpha > f(\alpha) > f(f(\alpha)) > \dots$ Néanmoins, dans le cas de ω, la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = n - 1$ pour $n \geqslant 1$ satisfait presque les hypothèses, puisqu'elle satisfait $f(\alpha) < \alpha$ pour tous les éléments de ω sauf un. Or la fonction est presque injective, puisque 0 est la seule valeur atteinte plus d'une fois.*

Le théorème de Fodor montre que la situation est radicalement différente dans le cas de ω_1 : si une fonction f satisfait presque toujours $f(\alpha) < \alpha$, alors elle est presque constante, presque signifiant ici « pour un ensemble stationnaire de valeurs ». ◁

Proposition 4.8. (théorème de Fodor) *Supposons que f est une application de ω_1 dans ω_1 telle que l'ensemble $\{\gamma\,;\, f(\gamma) < \gamma\}$ est stationnaire. Alors il existe α tel que $\{\gamma\,;\, f(\gamma) = \alpha\}$ est stationnaire.*

Démonstration. Pour chaque α dans ω_1, posons $X_\alpha := \{\gamma \in S\,;\, f(\gamma) = \alpha\}$. Supposons qu'aucun des ensembles X_α n'est stationnaire. Cela signifie que, pour chaque α, il existe un clos cofinal C_α qui est disjoint de X_α. Soit C l'intersection diagonale des C_α. Par le lemme 4.5, C est clos cofinal. Or, par définition, $\gamma \in C$ signifie que, pour tout $\alpha < \gamma$, on a $\gamma \in C_\alpha$, donc $\gamma \notin X_\alpha$, ce qui implique $f(\gamma) \geqslant \gamma$. Il en résulte que $\{\gamma\,;\, f(\gamma) < \gamma\}$ ne peut être stationnaire, puisqu'il ne rencontre pas le clos cofinal C. □

4.3. Le théorème de Silver.

▶ On déduit du théorème de Fodor le théorème de Siver affirmant que, si l'hypothèse du continu généralisée est fausse, alors le premier cardinal où elle est en défaut ne peut pas être $\aleph_{\omega_1}$. ◀

▷ *Le théorème de Silver donne une borne supérieure sur la valeur de $2^{\aleph_{\omega_1}}$ en fonction des valeurs précédentes de la fonction puissance, et il s'étend à tout cardinal $\aleph_\alpha$ avec α de cofinalité non dénombrable. La découverte en 1975 d'un résultat aussi simple puis celle, peu après, de la démonstration élémentaire de Galvin et Hajnal qu'on va donner ici ont été des surprises car la théorie des ensembles avait déjà atteint un grand degré de sophistication technique à cette époque, et on aurait pu penser que toutes les conséquences faciles de* ZFC *étaient connues depuis longtemps.* ◁

Proposition 4.9. (théorème de Silver) *Supposons qu'on a $2^\kappa = \kappa^+$ pour tout cardinal $\kappa < \aleph_{\omega_1}$. Alors on a $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$.*

On va démontrer le théorème de Silver par une méthode purement combinatoire faisant appel aux ensembles stationnaires et au théorème de Fodor, ainsi qu'à la notion de fonctions presque disjointes introduite ci-dessous. Dans toute la suite de cette section, on note $(*)$ l'hypothèse « pour tout cardinal $\kappa < \aleph_{\omega_1}$, on a $2^\kappa = \kappa^+$ ». Notons que $(*)$ entraîne

$$\forall \kappa, \lambda < \aleph_{\omega_1}\ (\kappa^\lambda < \aleph_{\omega_1}). \tag{4.2}$$

En effet, on trouve alors $\kappa^\lambda \leqslant (\kappa \cdot \lambda)^{\kappa\cdot\lambda} = 2^{\kappa\cdot\lambda} = (\kappa \cdot \lambda)^+ < \aleph_{\omega_1}$.

Définition 4.10. (presque disjoints) Deux fonctions f, g de domaine ω_1 sont dites *presque disjointes* s'il existe α tel que $\gamma \geqslant \alpha$ entraîne $f(\gamma) \neq g(\gamma)$.

Pour $X \subseteq \omega_{\omega_1}$, appelons f_X la suite $(X \cap \omega_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, qui, par définition, appartient à l'ensemble $\prod_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{P}(\omega_\alpha)$. Alors $X \neq Y$ entraîne que f_X et f_Y sont presque disjointes. En effet, il existe alors β dans la différence symétrique $X \vartriangle Y$ et, si β est dans ω_α, alors on a $X \cap \omega_\gamma \neq Y \cap \omega_\gamma$ pour tout $\gamma \geqslant \alpha$. Par ailleurs, l'hypothèse $(*)$ entraîne que $\mathfrak{P}(\omega_\alpha)$ a pour cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ donc est en bijection avec $\omega_{\alpha+1}$, et, par conséquent, pour obtenir le théorème de Silver, il suffit de démontrer le résultat suivant :

Lemme 4.11. $(*)$ *Le cardinal d'une famille de fonctions deux à deux presque disjointes dans* $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$ *est au plus* $\aleph_{\omega_1+1}$.

On va démontrer ce lemme à l'aide de trois résultats auxiliaires. Le premier fait un usage essentiel du théorème de Fodor sur les ensembles stationnaires.

Lemme 4.12. $(*)$ *Supposons que* S *est un sous-ensemble stationnaire de* ω_1 *et que* $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ *est une famille d'ensembles telle que, pour tout* α *dans* S, *on a* $\mathrm{card}(A_\alpha) \leqslant \aleph_\alpha$. *Alors le cardinal d'une famille de fonctions deux à deux presque disjointes dans* $\prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ *est au plus* $\aleph_{\omega_1}$.

Démonstration. Quitte à faire un transport, on peut supposer $A_\alpha = \omega_\alpha$ pour α dans S. Soit f quelconque dans $\prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$. Définissons $f' : \omega_1 \to \omega_1$ par $f'(\alpha) := \inf\{\beta\,;\, f(\alpha) \in \omega_\beta\}$ pour $\alpha \in S$, et $f'(\alpha) = 0$ pour $\alpha \notin S$. Si α est dans S et est limite, ω_α est l'union des ω_β pour $\beta < \alpha$, et il existe donc $\beta < \alpha$ tel qu'on ait $f(\alpha) \in \omega_\beta$. On a donc $f'(\alpha) < \alpha$ pour tout α limite dans S. L'ensemble L des ordinaux limites de ω_1 est clos cofinal, donc $S \cap L$ est stationnaire. Le théorème de Fodor entraîne qu'il existe un ensemble stationnaire S' et un ordinal β tel qu'on ait $f'(\alpha) = \beta$, donc $f(\alpha) \in \omega_\beta$, pour tout α dans S'.

Soit F une famille de fonctions deux à deux presque disjointes dans $\prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$. Par AC, on choisit pour chaque f dans F un ensemble stationnaire S_f et un ordinal β_f tels qu'on ait $f(\alpha) \in \omega_{\beta_f}$ pour α dans S_f. Soient f, g deux fonctions dans F distinctes, donc presque disjointes. Alors les couples $(S_f, f{\restriction}_{S_f})$ et $(S_g, g{\restriction}_{S_g})$ sont distincts : en effet, si on a $S_f = S_g$, l'hypothèse que f et g sont presque disjointes entraîne qu'il existe α dans S_f qui, étant stationnaire, est cofinal dans ω_1, pour lequel on a $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ [10].

Il ne reste qu'à majorer le nombre de couples (S, h) où S est un sous-ensemble stationnaire de ω_1 et h est une fonction de S dans un ω_β avec $\beta < \omega_1$. Or il existe $2^{\aleph_1}$ sous-ensembles S dans ω_1, et, pour $\beta < \omega_1$, au plus $\aleph_\beta^{\aleph_1}$ fonctions de S dans ω_β, donc au plus $\sum_{\beta<\omega_1} \aleph_\beta^{\aleph_1}$ fonctions de S dans un ω_β avec $\beta < \omega_1$. Par (4.2), on a $\aleph_\beta^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ pour $\beta < \omega_1$, d'où $\sum_{\beta<\omega_1} \aleph_\beta^{\aleph_1} \leqslant \aleph_{\omega_1}$, et, finalement, $\mathrm{card}(F) \leqslant 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$. $\square$

$\triangleright$ *Pour démontrer le lemme 4.12, on va construire un ordre partiel sur le produit* $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$ *dont la restriction à tout ensemble de fonctions presque disjointes est totale. Une condition du genre « $f(\alpha) < g(\alpha)$ pour tout α assez grand » ne peut fournir un ordre total. On a ici besoin d'une notion de gros sous-ensemble de ω_1 telle que, pour toute partie X de ω_1, soit X, soit $\omega_1 \setminus X$ soit gros : c'est ce que fournit un ultrafiltre. Or, comme l'ensemble des parties de ω_1 qui incluent un clos cofinal est un filtre, il peut être étendu en un ultrafiltre en vertu de la proposition 2.9, et ceci rend naturelle la définition suivante.* $\triangleleft$

[10] noter que l'argument fonctionne encore si on appelle presque disjointes des fonctions telles que l'ensemble des points de désaccord est seulement supposé clos cofinal

Soit U un ultrafiltre sur ω_1 contenant toutes les parties closes cofinales. Alors, pour f, g dans $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$ on pose

$$f \prec g \text{ si et seulement si } \{\alpha\,;\, f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U \tag{4.3}$$

LEMME 4.13. $(*)$ *La relation $\prec$ est un ordre sur $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$. Si F est une famille de fonctions presque disjointes dans $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$, alors la restriction de $\prec$ à F est un ordre total et, dans $(F, \prec)$, tout élément a au plus $\aleph_{\omega_1}$ prédécesseurs.*

DÉMONSTRATION. La relation $\prec$ est antiréflexive puisque $\emptyset$ n'est pas dans U, et elle est transitive parce que $\{\alpha\,;\, f(\alpha) < h(\alpha)\}$ inclut $\{\alpha\,;\, f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha\,;\, g(\alpha) < h(\alpha)\}$. Donc $\prec$ est un ordre (strict) sur $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$.

Soit F une famille de fonctions deux à deux presque disjointes dans $\prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+1}$. Pour f, g distinctes dans F, l'ensemble $\{\alpha\,;\, f(\alpha) = g(\alpha)\}$ est borné dans ω_1, donc il n'est pas dans U, et donc l'un exactement des ensembles $\{\alpha\,;\, f(\alpha) < g(\alpha)\}$, $\{\alpha\,;\, f(\alpha) > g(\alpha)\}$ est dans U, et l'une des relations $f \prec g$, $f \succ g$ est satisfaite. Par conséquent, la restriction de $\prec$ à F est un ordre total.

Soit g dans F. Pour S stationnaire dans ω_1, on pose $F_{g,S} := \{f \in F\,;\, \forall\alpha{\in}S\,(f(\alpha) < g(\alpha))\}$. Par construction, tout élément de U est stationnaire, donc tout $\prec$-prédécesseur de g est dans au moins un ensemble $F_{g,S}$. Or, toute fonction dans $F_{g,S}$ est dans $\prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$, avec $A_\alpha = g(\alpha)$ pour $\alpha \in S$ et $A_\alpha = \omega_{\alpha+1}$ sinon. Par hypothèse, on a $\mathrm{card}(g(\alpha)) \leqslant \aleph_\alpha$ pour tout α. Le lemme 4.13 implique $\mathrm{card}(F_{g,S}) \leqslant \aleph_{\omega_1}$ pour chaque S. Comme il y a $2^{\aleph_1}$ (donc $\aleph_2$ par hypothèse) ensembles stationnaires, on obtient finalement que g a au plus $2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1}$, soit $\aleph_{\omega_1}$, $\prec$-prédécesseurs dans F. □

Le lemme 4.12, et donc aussi le théorème de Silver, résultent alors du critère général suivant :

LEMME 4.14. *Si $\prec$ est un ordre total sur A tel que tout élément a au plus κ prédécesseurs, alors on a nécessairement* $\mathrm{card}(A) \leqslant \kappa^+$.

DÉMONSTRATION. Soit F une fonction de choix sur $\mathfrak{P}(A)$. On construit récursivement une suite strictement croissante $(x_\alpha)_\alpha$ en posant $x_\alpha := F(\{x \in A\,;\, \forall\beta{<}\,\alpha\,(x_\beta \prec x)\})$ tant que cet ensemble n'est pas vide. Par remplacement, la construction doit s'arrêter et on obtient ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$ cofinale dans $(A, \prec)$. On doit avoir $\theta \leqslant \kappa^+$, car, sinon, les éléments x_α avec $\alpha < \kappa^+$ constitueraient κ^+ prédécesseurs distincts de x_{κ^+}. Notant $I(x)$ le segment initial de $(A, \prec)$ déterminé par x, on a $\mathrm{card}(I(x)) \leqslant \kappa$ pour tout x par hypothèse. Comme $(x_\alpha)_{\alpha<\theta}$ est cofinale dans $(A, \prec)$, on a $A = \bigcup_{\alpha<\theta} I(x_\alpha)$, d'où $\mathrm{card}(A) \leqslant \sum_{\alpha<\theta} \kappa = \mathrm{card}(\theta) \cdot \kappa \leqslant \kappa^+ \cdot \kappa = \kappa^+$. □

▷ *En considérant de façon similaire des ensembles stationnaires non plus sur ω_1, mais sur un cardinal quelconque de cofinalité non dénombrable, on peut établir la forme générale suivante du théorème de Silver : si λ est un cardinal singulier de cofinalité non dénombrable et qu'on a $2^\kappa = \kappa^+$ pour $\kappa < \lambda$, alors on a nécessairement $2^\lambda = \lambda^+$. Il en résulte que le premier cardinal où l'hypothèse du continu généralisée est en défaut ne peut, s'il existe, être un cardinal singulier de cofinalité non dénombrable.* ◁

4.4. Cofinalité dénombrable.

▶ On mentionne sans démonstration des bornes supérieures sur les valeurs de $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ et $2^{\aleph_\omega}$ établies par S. Shelah. ◀

PROPOSITION 4.15. (théorème de Shelah) *On a l'inégalité* $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0} + \aleph_{\omega_4}$.

▷ *La démonstration de ce résultat étonnant (pourquoi ω_4 ?) repose sur la théorie dite des cofinalités possibles (« pcf theory »), qui est l'objet du livre* [**14**]. *Elle utilise les notions de sous-ensembles clos cofinaux et stationnaires dans ω_3, mais également des outils de combinatoire infinie beaucoup plus sophistiqués que ceux qui ont été décrits ici.* ◁

Corollaire 4.16. *Si on a $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ pour tout entier n, alors on a $2^{\aleph_\omega} \leqslant \aleph_{\omega_4}$.*

Démonstration. L'application qui associe à toute partie A de ω_ω la suite $(A \cap \omega_n)_{n<\omega}$ définit une injection de $\mathfrak{P}(\omega_\omega)$ dans $\prod_{n<\omega} \mathfrak{P}(\omega_n)$, d'où l'inégalité $2^{\aleph_\omega} \leqslant \prod_{n<\omega} 2^{\aleph_n}$ dans tous les cas, puis $2^{\aleph_\omega} \leqslant \prod_{n<\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}$ si, pour chaque n, on a $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$. On applique alors le théorème de Shelah, et on obtient le résultat, puisque l'hypothèse $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ implique $2^{\aleph_0} + \aleph_{\omega_4} = \aleph_{\omega_4}$. □

▷ *En fait, une application directe de la théorie des cofinalités possibles montre que l'inégalité du corollaire est stricte. L'intérêt principal de ces formules ne tient pas tant aux bornes précises obtenues qu'au caractère étonamment simple des formules obtenues, en particulier au fait que le théorème de Shelah ne repose sur aucune hypothèse au-delà des axiomes de* ZFC. ◁

Exercices

Exercice 1. (somme) Montrer que $\forall i{\in}I(\kappa_i < \kappa'_i)$ ne garantit pas $\sum_{i\in I} \kappa_i < \sum_{i\in I} \kappa'_i$.

Exercice 2. (cofinalité) Montrer que, si $(A, <)$ est un ensemble totalement ordonné, il existe toujours une partie cofinale B de $(A, <)$ telle que $<\restriction_B$ soit un bon ordre. [Raisonner comme dans la démonstration du lemme de Zorn.] En déduire que la notion de cofinalité fait sens pour tout ensemble totalement ordonné. Quelle est la cofinalité de $(\mathbb{R}, <)$?

Exercice 3. (puissance) Montrer $\aleph_0^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

Exercice 4. (stationnaires) Montrer qu'il existe un sous-ensemble stationnaire de ω_1 dont le complémentaire dans ω_1 est stationnaire. [Fixer pour chaque α limite une suite croissante $(\gamma_{n,\alpha})_{n<\omega}$ de limite α, et considérer la fonction f_n définie par $f_n(\alpha) := \gamma_{n,\alpha}$ pour obtenir S_n stationnaire et γ_n tels que $\alpha \in S_n$ entraîne $\gamma_{n,\alpha} = \gamma_n$. Montrer que $\bigcap_n S_n$ est un singleton, et, de là, qu'il existe n tel que $\omega_1 \setminus S_n$ est stationnaire.]