CHAPITRE IX

Modèles de ZF

RÉSUMÉ. • *Puisque* ZF *est une théorie du premier ordre, on peut en considérer des modèles abstraits; le théorème de complétude permet d'utiliser une méthode sémantique de démonstration : une formule ensembliste est prouvable à partir de* ZF *si et seulement si elle est vraie dans tous les modèles de* ZF.
• *Faute de pouvoir l'exprimer au premier ordre, on ne peut exclure l'existence d'entiers non standards dans les modèles de* ZF.
• *Le théorème d'incomplétude de Gödel interdit qu'on puisse construire* ex nihilo *un modèle de* ZF.
• *On peut construire sur* $\mathbb{N}$ *une relation* E *telle que* $(\mathbb{N}, E)$ *est modèle de* $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}}$ *; les systèmes* $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}}$ *et* PA_2 *ont la même force.*
• *Si* $\mathcal{M}$ *est un modèle de* ZF, « *se placer dans* $\mathcal{M}$ » *consiste à convenir que toutes les notions ensemblistes réfèrent à* $\mathcal{M}$.
• *Partant d'un modèle de* ZF, *on étudie les sous-structures* $(\mathbf{M}, \in)$ *où* $\mathbf{M}$ *est un ensemble ou une classe transitive du modèle ; alors* $(\mathbf{V}, \in)$ *est extension finale de* $(\mathbf{M}, \in)$, *et un grand nombre de notions ensemblistes sont* absolues *pour* $\mathbf{M}$, *c'est-à-dire ont la même interprétation dans les deux structures.*
• *La structure* $(V_\omega, \in)$ *est modèle de* ZFC *moins l'axiome de l'infini ; ceci entraîne que* ZFC−Inf *ne prouve pas* Inf, *et, par le théorème d'incomplétude de Gödel, que la consistance de* ZFC−Inf *n'entraîne pas celle de* ZFC.
• *La structure* $(V_{\omega+\omega}, \in)$ *est modèle de* ZC *mais pas de* ZFC *; ceci entraîne que le système* ZFC *est strictement plus fort que le système de Zermelo* ZC.
• *La consistance de* ZFC *moins l'axiome de fondation entraîne celle de* ZFC.
• *Un cardinal est* inaccessible *s'il est régulier et fortement limite. Si* κ *est inaccessible, la structure* $(V_\kappa, \in)$ *est modèle de* ZFC *; ceci entraîne que l'existence d'un cardinal inaccessible ne peut être démontrée à partir de* ZFC, *ni même sa consistance établie.*
• *Toute structure* $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ *avec* $\mathbf{R}$ *bien fondée se projette sur une structure* $(\mathbf{M}, \in)$ *avec* $\mathbf{M}$ *classe transitive : ceci légitime de se concentrer sur les modèles de* ZF *de ce type.*

► Ce chapitre rassemble des résultats élémentaires sur les modèles de ZF, c'est-à-dire les structures qui satisfont tous les axiomes de ZF. On en déduit quelques résultats d'indépendance relative entre les axiomes de ZF.

Dans la première section, on introduit la notion générale de modèle du système ZF, et on décrit comme exemple le modèle d'Ackermann qui satisfait tous les axiomes de ZFC sauf l'axiome de l'infini. On observe que le théorème d'incomplétude de Gödel interdit de pouvoir construire un modèle de ZF explicitement, puis on note l'existence de modèles non-standards dont les entiers ne sont pas une copie de $\mathbb{N}$, Dans la deuxième section, on se concentre sur des structures de la forme $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$, où $\mathbf{M}$ est une classe transitive, et on établit des critères pour reconnaître quand une telle structure est modèle de ZF, et, dans ce cas, comparer les interprétations de diverses notions ensemblistes dans le modèle de référence $(\mathbf{V}, \in)$ et dans $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$. Dans la troisième section, on applique les résultats précédents au cas particulier des structures $(V_\alpha, \in\restriction_{V_\alpha})$: on montre que $(V_\omega, \in\restriction_{V_\omega})$ est modèle de ZFC−Inf, que $(V_\lambda, \in\restriction_{V_\lambda})$ est modèle de ZC pour λ ordinal limite, et que $(V_\kappa, \in\restriction_{V_\kappa})$ est modèle de ZFC pour κ cardinal inaccessible. On en déduit que l'axiome de l'infini ne peut pas être démontré à partir des autres axiomes de ZFC, et que les axiomes de remplacement ne peuvent pas être démontrés à partir des axiomes de Zermelo. Dans la quatrième section, on étend le schéma de définition récursive établi au chapitre III pour les récursions ordinales aux récursions sur une relation bien fondée quelconque, et on en déduit le théorème de Mostowski affirmant que toute structure $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ avec $\mathbf{R}$ bien fondée se projette sur une structure $(\mathbf{M}, \in)$ avec $\mathbf{M}$ classe transitive. ◀

▷ *Ce chapitre marque le début de la théorie des ensembles modernes, telle qu'elle a été développée depuis le deuxième tiers du XXe siècle. L'approche retenue correspond à un changement de point de vue radical par rapport à la partie A. Dans celle-ci, on étudiait* ***une*** *structure particulière, à savoir la structure constituée des ensembles purs munis de la relation d'appartenance à partir d'un système axiomatique adopté par consensus, en l'occurrence le système de Zermelo–Fraenkel, à la façon dont l'arithmétique étudie la structure* $(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ *à partir du système de Peano. Le théorème de complétude établi au chapitre VII autorise et induit une approche totalement nouvelle, à savoir l'étude des structures abstraites* (M, E) *qui sont modèles de* ZF*, c'est-à-dire telles que* E *est une relation binaire sur* M *et tous les axiomes de* ZF *sont satisfaits lorsque les variables réfèrent à des éléments de* M *et que le symbole* ∈ *est interprété par la relation* E*. Cette étude fait sens car, en vertu du théorème de complétude, et sauf si* ZF *est contradictoire, il doit exister de tels modèles.*

Passer de l'étude de l'unique structure formée par les vrais ensembles à celle de modèles abstraits de ZF *est une révolution copernicienne. D'un point de vue pratique, ce passage à la multiplicité des mondes permet immédiatement d'envisager des opérations algébriques sur les modèles : produits de modèles, sous-modèles, extensions de modèles, impensables sans la notion de modèle abstrait. Toute la suite de ce texte — et toute la théorie des ensembles depuis 1935 — repose sur l'exploitation de cette idée.*

D'emblée, il faut annoncer que l'étude des modèles de ZF *est difficile, compliquée, en grande partie incomplète, et donc frustrante. En particulier, ce chapitre préliminaire contient peu de résultats spectaculaires — ce ne sera probablement pas une grande suprise d'apprendre que l'axiome de l'infini ne se déduit pas des autres axiomes du système de Zermelo, ni même de découvrir comment le démontrer rigoureusement. On y trouve néanmoins deux idées cruciales pour la suite, à savoir la notion de modèle transitif, et la description de phénomènes d'absoluité entre deux modèles.* ◁

1. La notion de modèle de ZF

▶ On commence l'étude des modèles de ZF par le modèle d'Ackermann, qui n'est pas modèle de ZF mais seulement du fragment obtenu en otant l'axiome de l'infini. Ensuite, on observe que le second théorème d'incomplétude de Gödel interdit de pouvoir construire, dans le cadre de ZF, un modèle de ZF explicite, mais, par contre, on note qu'il doit exister des modèles de ZF dénombrables. Puis on montre que, sauf à sortir du cadre de la logique du premier ordre, on ne peut écarter les modèles de ZF dits non standards, définis comme ceux où l'ordinal ω n'est pas la borne supérieure des ordinaux $\underline{\mathsf{n}}$ pour n entier naturel. Enfin, on discute brièvement l'utilisation des modèles de ZF, à la fois pour établir des résultats de prouvabilité et des résultats de non-prouvabilité, et on conclut avec la notion de formule relativisée qui permet d'utiliser un formalisme de structure même dans le cas de domaines qui sont des classes propres. ◀

La théorie ZF est une liste (infinie) de formules de la logique du premier ordre $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$, et la notion de modèle de ZF est la notion usuelle de modèle telle que définie au chapitre VII :

DÉFINITION 1.1. (modèle de ZF) On appelle *modèle de* ZF toute structure (M, E) composée d'un ensemble non vide M et d'une relation binaire E sur M telle que tous les axiomes de ZF sont satisfaits dans (M, E).

Le théorème de complétude pour la logique du premier ordre $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$ (proposition VII.2.5) implique immédiatement :

PROPOSITION 1.2. (existence) *Sauf si* ZF *est contradictoire, il existe des modèles de* ZF.

1.1. Le modèle d'Ackermann.

▶ On définit sur $\mathbb{N}$ une relation E telle que $(\mathbb{N}, E)$ est un modèle du système $\mathsf{ZFC_{fini}}$ obtenu en otant de ZFC l'axiome de l'infini. ◀

▷ *Qu'il s'agisse de groupes ou de variétés différentielles, il est bienvenu, quand on introduit une notion nouvelle, de commencer par quelques exemples simples, et on aimerait donc débuter l'étude des modèles de* ZF *par la description d'au moins un exemple. Malheureusement, on verra dans la section 1.2 que ce n'est guère possible. A défaut et pour tempérer ce résultat décourageant, on décrit ici une structure qui est modèle de* $\mathsf{ZFC_{fini}}$*, c'est-à-dire de tous les axiomes de* ZFC *moins l'axiome de l'infini. Bien que cette structure soit fort éloignée d'un véritable modèle de* ZF*, c'est un bon exercice de la manipuler afin de se familiariser avec la notion de modèle.* ◁

DÉFINITION 1.3. (relation d'Ackermann) Pour p, q entiers naturels, on note $[\mathsf{q}]$ l'unique ensemble d'entiers $\{\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p_m}\}$ tel qu'on ait $\mathsf{q} = 2^{\mathsf{p}_1} + ... + 2^{\mathsf{p_m}}$; on dit alors que $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}$ est vraie pour $\mathsf{p} \in [\mathsf{q}]$.

EXEMPLE 1.4. (relation d'Ackermann) Les éléments de l'ensemble $[\mathsf{q}]$ sont les positions en partant de la droite où le développement binaire de q a un chiffre 1. Donc, par exemple, la relation $0\ E\ \mathsf{q}$, c'est-à-dire $0 \in [\mathsf{q}]$, est vraie si et seulement si le chiffre des unités dans le développement binaire de q est un 1, donc si et seulement si q est impair. De même, on a $1\ E\ \mathsf{q}$ si et seulement le chiffre des dizaines dans le développement binaire de q est un 1, c'est-à-dire pour q congru à 2 ou 3 *modulo* 4. Plus généralement, on a l'équivalence

$$\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q} \Leftrightarrow \exists \mathsf{m}{<}\mathsf{q}\ \exists \mathsf{n}{<}2^{\mathsf{p}}\ (\mathsf{q} = \mathsf{m} \cdot 2^{\mathsf{p}+1} + 2^{\mathsf{p}} + \mathsf{n}). \tag{1.1}$$

On veut montrer que la structure $(\mathbb{N}, E)$ est presque un modèle de ZFC. Donc, dans le cas présent, le rôle des ensembles est tenu par les entiers naturels, et celui de l'appartenance par l'exotique relation E.

LEMME 1.5. (i) *La structure* $(\mathbb{N}, E)$ *satisfait l'axiome d'extensionnalité.*

(ii) *Pour tout entier* q, *il existe un nombre fini d'entiers* p *vérifiant* $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}$.

(iii) *Pour tous* $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p_m}$ *deux à deux distincts, il existe un unique entier* q *tel que les entiers* p *vérifiant* $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}$ *soient exactement* $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p_m}$.

DÉMONSTRATION. (i) Si q et q' ont les mêmes E-éléments, c'est-à-dire si les éléments p vérifiant $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}$ sont les mêmes que ceux vérifiant $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}'$, les développements binaires de q et q' ont des 1 aux mêmes positions, donc coïncident, ce qui entraîne $\mathsf{q} = \mathsf{q}'$ puisqu'un entier est déterminé par son développement binaire.

(ii) Il n'existe qu'un nombre fini de 1 dans le développement binaire de q, donc le même nombre fini d'entiers p vérifiant $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}$.

(iii) Posons $\mathsf{q} = 2^{\mathsf{p}_1} + \cdots + 2^{\mathsf{p}_\mathsf{m}}$. Par définition, le développement binaire de q a des 1 aux positions $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_\mathsf{m}$ de la droite, et à celles-là seules. Cela signifie qu'on a $\mathsf{p}_\mathsf{i}\ E\ \mathsf{q}$ pour chaque i, et $\neg(\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q})$ pour $\mathsf{p} \neq \mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_\mathsf{m}$. □

PROPOSITION 1.6. (modèle d'Ackermann) *La structure* $(\mathbb{N}, E)$ *vérifie tous les axiomes de* ZFC *à l'exception de l'axiome de l'infini, qui, lui, y est faux.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 1.5, l'axiome d'extensionnalité est satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$.

Pour l'axiome de la paire, soient p, q deux entiers quelconques. Il s'agit de montrer l'existence d'au moins un entier r tel que $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{r}$ et $\mathsf{q}\ E\ \mathsf{r}$ soit satisfait, ce que le lemme 1.5(iii) assure.

Pour l'axiome de l'union, soit p un entier quelconque. Par le lemme 1.5(ii), il existe un nombre fini d'entiers p_1,...,p_n vérifiant $\mathsf{p}_\mathsf{i}\ E\ \mathsf{p}$, puis, pour chaque i, un nombre fini d'entiers $\mathsf{p}_{\mathsf{i},\mathsf{j}}$ vérifiant $\mathsf{p}_{\mathsf{i},\mathsf{j}}\ E\ \mathsf{i}$. Par le lemme 1.5($iii$) il existe un entier q tel que $\mathsf{p}_{\mathsf{i},\mathsf{j}}\ E\ \mathsf{q}$ soit satisfait pour tous i, j : cet entier r contient donc, au sens de E, tous les E-éléments des E-éléments de p.

Considérons l'axiome des parties. Soit q un entier quelconque. Dire que q est inclus dans p au sens de $(\mathbb{N}, E)$, c'est-à-dire que la relation $\mathsf{q} \subseteq^{(\mathbb{N},E)} \mathsf{p}$ est vérifiée, c'est dire que tout E-élément de q est E-élément de p, donc que l'ensemble $[\mathsf{q}]$ est inclus dans l'ensemble $[\mathsf{p}]$ (au sens usuel). Soit alors r l'unique entier vérifiant

$$[\mathsf{r}] = \{\mathsf{q}\,;\, [\mathsf{q}] \subseteq [\mathsf{p}]\},$$

ce qui a un sens puisque $[\mathsf{p}]$ est fini, et l'ensemble ci-dessus est donc fini. Si q est inclus dans p au sens de $(\mathbb{N}, E)$, on a $[\mathsf{q}] \subseteq [\mathsf{p}]$, donc $\mathsf{q} \in [\mathsf{p}]$, soit $\mathsf{q}\ E\ \mathsf{r}$. Par conséquent, tout E-sous-ensemble de p est E-élément de r, et l'entier r témoigne de ce que l'axiome des parties est satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$.

Soient maintenant $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{\boldsymbol{z}})$ une formule ensembliste, et $\mathsf{p}, \vec{\mathsf{r}}$ des entiers. L'ensemble des E-éléments n de p vérifiant $\mathsf{F}(\mathsf{n}, \vec{\mathsf{r}})$ est fini. Par le lemme 1.5(iii) il existe un unique entier q vérifiant

$$[\mathsf{q}] = \{\boldsymbol{x}\ E\ \mathsf{p}\,;\, \mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{\mathsf{r}})\},$$

et, alors, q est un entier dont les E-éléments sont exactement les E-éléments n de p vérifiant $\mathsf{F}(\mathsf{n}, \vec{\mathsf{r}})$. Donc, l'axiome de séparation pour la formule F est satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$.

Soient maintenant $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{z}})$ une formule ensembliste, et $\mathsf{p}, \vec{\mathsf{r}}$ des entiers. Supposons que, pour chaque n, il existe au plus un m tel que $\mathsf{F}(\mathsf{n}, \mathsf{m}, \vec{\mathsf{r}})$ soit vrai dans $(\mathbb{N}, E)$. Soit alors q l'unique entier vérifiant

$$[\mathsf{q}] = \{\boldsymbol{y}\,;\, \exists \boldsymbol{x}{\in}[\mathsf{p}](\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\mathsf{r}}))\}.$$

L'ensemble de m vérifiant $\exists \boldsymbol{x}{\in}\, [\mathsf{p}](\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \mathsf{m}, \vec{\mathsf{r}}))$ est fini puisque $[\mathsf{p}]$ l'est, donc l'existence de q est assurée, et, par construction, tout entier m tel qu'il existe un E-élément n de p vérifiant $\mathsf{F}(\mathsf{n}, \mathsf{m}, \vec{\mathsf{r}})$ est E-élément de q. Donc l'axiome de remplacement associé à F est satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$.

Pour l'axiome du choix, soit p un entier quelconque. Il existe un nombre fini d'entiers non nuls p_1,...,p_n tels que $\mathsf{p}_\mathsf{i}\ E\ \mathsf{p}$ soit satisfait. Pour chacun d'eux, soit q_i le plus petit entier pour lequel $\mathsf{q}_\mathsf{i}\ E\ \mathsf{p}_\mathsf{i}$ est satisfait, et soit r_i l'entier qui est, au sens de E, le couple $(\mathsf{p}_\mathsf{i}, \mathsf{q}_\mathsf{i})$, à savoir $2^{2^{\mathsf{p}_\mathsf{i}}+2^{\mathsf{p}_\mathsf{i}+\mathsf{q}_\mathsf{i}}}$. Soit enfin q l'entier dont les E-éléments sont $\mathsf{r}_1, ..., \mathsf{r}_\mathsf{n}$. Alors q est, au sens de $(\mathbb{N}, E)$, une fonction de choix sur p, et l'axiome du choix est satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$.

Enfin, soit r un entier non nul, et soit q le plus petit des E-éléments de r, au sens de l'ordre usuel des entiers. Comme $\mathsf{p}\ E\ \mathsf{q}$ entraîne $\mathsf{p} < \mathsf{q}$, aucun E-élément de q ne peut être E-élément de r, et, au sens de $(\mathbb{N}, E)$, on a trouvé un E-élément de r disjoint de r. Donc l'axiome de fondation est satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$, et, par conséquent, tous les axiomes de ZFC, sauf peut-être l'axiome de l'infini, y sont satisfaits.

Or, pour ce qui est de ce dernier, s'il était satisfait dans $(\mathbb{N}, E)$, l'entier $\omega^{(\mathbb{N},E)}$ serait un entier q tel que $[\mathsf{q}]$ contiendrait chacun des ordinaux $\underline{\mathsf{n}}^{(\mathbb{N},E)}$ pour $\mathsf{n} \in \mathbb{N}$. Comme les axiomes de $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$ montrent que les ordinaux $\underline{\mathsf{n}}$ sont deux à deux distincts, l'ensemble $[\mathsf{q}]$ devrait être infini : ceci est impossible, donc l'axiome de l'infini est faux dans la structure $(\mathbb{N}, E)$. □

Exemple 1.7. (modèle d'Ackermann) Chaque ensemble A qui est définissable dans le système $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$, c'est-à-dire dont $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$ garantit l'existence et l'unicité, possède une contrepartie $A^{(\mathbb{N},E)}$ dans chaque modèle de $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$, donc en particulier dans le modèle $(\mathbb{N}, E)$. Ainsi, pour l'entier $\underline{0}$, *alias* l'ensemble vide, on trouve $\underline{0}^{(\mathbb{N},E)} = \emptyset^{(\mathbb{N},E)} = 0$, puisque 0 n'a aucun E-élément. De même, l'interprétation de $\{\emptyset\}$ dans $(\mathbb{N}, E)$ est un entier q vérifiant $[\mathsf{q}] = \{0\}$, donc c'est 1, et on a $\underline{1}^{(\mathbb{N},E)} = \{\emptyset\}^{(\mathbb{N},E)} = 1$. Ensuite, l'interprétation de $\{\underline{0}, \underline{1}\}$ dans $(\mathbb{N}, E)$ est un entier q vérifiant $[\mathsf{q}] = \{0, 1\}$, donc c'est 3, et on a $\underline{2}^{(\mathbb{N},E)} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^{(\mathbb{N},E)} = 3$. On pourra vérifier de même les égalités $\underline{3}^{(\mathbb{N},E)} = 11$ et $\underline{4}^{(\mathbb{N},E)} = 2059$.

1.2. Construction de modèles de ZF.

► On observe que le second théorème d'incomplétude de Gödel interdit de construire un modèle de ZF en restant dans le cadre de ZF. Par contre, le théorème de Lowenheim-Skolen garantit l'existence de modèles dénombrables de ZF (paradoxe de Skolem). ◄

▷ *On a vu au chapitre III que pratiquement tous les objets mathématiques peuvent se représenter comme des ensembles purs, et, de là, chaque modèle de* ZF *doit inclure sa propre version de tous ces objets. On peut donc s'attendre à ce qu'un modèle de* ZF *soit un objet extrêmement compliqué et difficile à décrire. Le second théorème d'incomplétude de Gödel permet de donner une forme précise à cette intuition : il n'y a aucun espoir de définir une (astucieuse) relation E sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou quelque objet mathématique usuel que ce soit, de façon à obtenir un modèle de* ZF. ◁

Proposition 1.8. (obstruction) *On ne peut construire un modèle de* ZF *dans le cadre métamathématique de* ZF. *Plus précisément, l'énoncé « il existe un modèle de* ZF *» ne peut être prouvé à partir des axiomes de* ZF.

Démonstration. Supposons qu'on peut montrer dans le cadre métamathématique $\mathsf{T}^\star$ qu'il existe un ensemble M et une relation binaire E sur M tels que (M, E) est un modèle de ZF. Ceci signifie que $\mathsf{T}^\star$ prouve la formule « Il existe M et E tels que (M, E) satisfait tous les axiomes de ZF ». Par définition de la sémantique de la logique du premier ordre, $\mathsf{T}^\star$ prouve alors que toute formule prouvable à partir de ZF est vraie dans la structure (M, E). D'autre part, toujours par définition, il est impossible qu'une formule F et sa négation soient simultanément vraies dans (M, E). Par conséquent $\mathsf{T}^\star$ prouve qu'il est impossible d'avoir à la fois $\mathsf{ZF} \vdash \mathsf{F}$ et $\mathsf{ZF} \vdash \neg\mathsf{F}$. Autrement dit, on peut démontrer dans le cadre de $\mathsf{T}^\star$ que ZF est une théorie consistante. Pour autant que cette démonstration soit formalisable en logique du premier ordre, on a donc $\mathsf{T}^\star \vdash \mathrm{Cons}_{\mathsf{ZF}}$. Mais alors, le second théorème d'incomplétude de Gödel montre que $\mathsf{T}^\star$ ne peut être ni ZF, ni aucune théorie dont ZF prouve la consistance. □

▷ *Si on pouvait, disons, définir sur $\mathbb{R}$ à l'aide des opérations usuelles sur $\mathbb{R}$ une certaine relation E et montrer à partir des propriétés de ces opérations que $(\mathbb{R}, E)$ est un modèle de* ZF, *alors, en remplaçant $\mathbb{R}$ et E par les ensembles purs $\underline{\mathbb{R}}$ et $\underline{E}$ qui les représentent, et en tenant* *compte de ce que* ZF *démontre toutes les propriétés usuelles des contre-parties ensemblistes des opérations usuelles sur* $\mathbb{R}$, *on construirait à l'aide des seuls axiomes de* ZF *un modèle de* ZF, *en contradiction avec la proposition 1.8. Donc, il n'est pas impossible qu'il existe une relation* E *telle que* $(\mathbb{R}, E)$ *soit un modèle de* ZF, *mais il est impossible que cette opération puisse être définie explicitement à partir d'opérations sur* R *possédant des contre-parties ensemblistes dont* ZF *démontre les propriétés, typiquement les propriétés algébriques, topologiques, ordonnées, bref toutes les propriétés usuelles. En d'autres termes, si* $(\mathbb{R}, E)$ *est un modèle de* ZF, *alors* E *ne peut être définie explicitement.*

Noter que la proposition 1.8 n'interdit rien dès lors que le cadre métamathématique est strictement plus fort que ZF. *On verra plus loin que, si* $\mathsf{T}^\star$ *est le système obtenu en ajoutant à* ZF *l'axiome « il existe un cardinal inaccessible », alors on démontre dans* $\mathsf{T}^\star$ *l'existence d'un modèle de* ZF. ◁

Par contraste avec le résultat négatif précédent, on peut noter le résultat positif suivant, qui raffine la proposition 1.2 :

PROPOSITION 1.9. (paradoxe de Skolem) *Sauf si* ZF *est contradictoire, il existe, pour chaque cardinal infini* κ, *un modèle de* ZF *de cardinal* κ, *donc, en particulier, il existe un modèle de* ZF *qui est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Appliquer le théorème de Lowenheim–Skolem (proposition VII.3.9) à la famille dénombrable de formules ZF. □

▷ *Ce résultat apparaît paradoxal puisque* ZF *entraîne l'existence d'ensembles non dénombrables, par exemple l'ensemble* $\mathfrak{P}(\omega)$ *des parties de l'ordinal* ω *: on voit alors mal comment un modèle dénombrable* (M, E) *pourrait inclure un ensemble non dénombrable* $\mathfrak{P}(\omega)$. *Le paradoxe naît d'une confusion entre les notions externes, métamathématiques, d'ensemble et de cardinalité, et leurs contreparties internes dans chaque modèle de* ZF. *Si* (M, E) *est un modèle de* ZF, *alors il existe dans* M *deux éléments* a, b *qui sont respectivement l'interprétation de* $\boldsymbol{\omega}$ *et de de* $\boldsymbol{\mathfrak{P}(\omega)}$, *et le théorème de Cantor affirme qu'il n'existe dans* M *aucun élément qui, au sens de* (M, E), *soit une bijection entre* a *et* b. *Ceci n'a rien à voir avec le fait que, dans le monde métamathématique ambiant,* M *puisse être un ensemble dénombrable, et que, dans ce cas, l'ensemble (métamathématique) des éléments* x *de* M *vérifiant* xEb, *c'est-à-dire* $x \in \mathfrak{P}(\omega)$ *au sens de* (M, E), *soit nécessairement dénombrable puisqu'inclus dans* M, *et qu'il puisse de ce fait exister une bijection* $\widetilde{f}$ *entre l'ensemble* $\widetilde{a}$ *des éléments* x *de* M *vérifiant* xEa *et l'ensemble* $\widetilde{b}$ *des éléments* x *de* M *vérifiant* xEb *: il n'y a aucune raison pour que ni* $\widetilde{f}$, *ni même* $\widetilde{a}$ *et* $\widetilde{b}$ *soient des éléments de* M, *c'est-à-dire des ensembles au sens du modèle* (M, E). ◁

1.3. Modèles standards et non-standards.

▶ On établit une réponse négative à la question III.2.15 demandant si l'ordinal ω est nécessairement la borne supérieure des ordinaux $\underline{\mathrm{n}}$ pour n entier naturel : s'il existe des modèles de ZF, il existe des modèles dits non-standards dans lesquels ω n'est pas la borne supérieure des entiers naturels. ◀

▷ *On a montré au chapitre III que la structure* $(\omega, \emptyset, S, +, \cdot)$ *est un modèle du système de Peano* PA, *et donc en particulier de sa version du premier ordre* PA_1. *Par conséquent, dans tout modèle* (M, E) *de* ZF, *il existe un objet* $(\omega, \emptyset, S, +, \cdot)^{(M,E)}$ *qui est la version de la structure* $(\omega, \emptyset, S, +, \cdot)$ *suivant le modèle* (M, E), *c'est-à-dire la version de l'arithmétique dans ce modèle*[1], *et qui est un modèle de* PA_1. *A ce titre, on sait que le domaine* $\omega^{(M,E)}$ *de la structure est une*

[1]on n'affirme *pas* que la théorie du premier ordre de $(\omega, \emptyset, S, +, \cdot)^{(M,E)}$ coïncide avec celle de $(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$

extension finale d'une partie initiale isomorphe à $\mathbb{N}$, et donc est soit isomorphe à $\mathbb{N}$ (modèle standard de PA_1), soit une extension propre de $\mathbb{N}$ (modèle non standard). ◁

DÉFINITION 1.10. (standard) On appelle *standard* un modèle de ZF dans lequel ω est la borne supérieure des ordinaux $\underline{\mathsf{n}}$ pour n entier naturel.

PROPOSITION 1.11. (non-standard) *Si ZF est consistante, il existe des modèles non-standards de ZF.*

DÉMONSTRATION. Soit Σ^*_{ens} la signature en ajoutant à la signature Σ_{ens} un nouveau symbole de constante $\boldsymbol{c}$, et soit ZF^* la théorie de $\mathcal{L}_{\Sigma^*_{\mathrm{ens}}}$ obtenue en ajoutant à ZF la formule « $\boldsymbol{c}$ est un ordinal fini » et, pour chaque entier naturel n, la formule $\underline{\mathsf{n}} < \boldsymbol{c}$. Alors, si ZF est consistant, il en est de même de ZF^*, car un sous-ensemble fini de ZF^* ne contient qu'un nombre fini de contraintes $\underline{\mathsf{n}} < \boldsymbol{c}$ et on peut toujours interpréter $\boldsymbol{c}$ par un ordinal $\underline{\mathsf{m}}$ suffisamment grand. Or un modèle de ZF^* est nécessairement un modèle non standard de ZF, puisque l'interprétation de $\boldsymbol{c}$ y est un ordinal fini plus grand que tous les $\underline{\mathsf{n}}$. ☐

▷ *L'intuition réclame que le modèle de l'arithmétique formé par les ordinaux finis soit le modèle standard, mais la proposition 1.11 montre que les axiomes introduits jusqu'à présent sont insuffisants à le prouver. Suivant la démarche du chapitre III, il serait donc naturel d'ajouter ici un nouvel axiome, qu'on pourrait appeler* axiome de modèle standard*, affirmant que ω est bien la borne des ordinaux $\underline{\mathsf{n}}$. Le problème est qu'un tel axiome ne peut être exprimé à l'aide d'une formule du premier ordre : quel que soit le système du premier ordre T incluant ZF, l'argument de compacité de la démonstration de la proposition 1.11 reste valable, qui montre que, si T a un modèle, il a un modèle non-standard. Les deux seules options possibles sont donc soit de sortir du cadre de la logique du premier ordre, soit de renoncer à adopter l'axiome de modèle standard. Comme on ne peut raisonnablement renoncer au théorème de complétude, on choisit la seconde option.*

La proposition 1.11 montre que l'existence d'un modèle non-standard de ZFC n'est pas une hypothèse logique plus forte que l'existence d'un modèle quelconque ; par contre, il n'y a pas de résultat symétrique avec les modèles standards, et on ne peut pas démontrer l'existence d'un modèle standard de ZFC à partir de la seule hypothèse qu'il existe un modèle (cf. exercice VIII.7). ◁

1.4. La méthode sémantique en théorie des ensembles.

► Développer une étude générale des modèles de la théorie ZFC permet à la fois de recourir à des démonstrations sémantiques, et, éventuellement, de compléter notre intuition des ensembles en vue notamment de faire émerger de nouveaux axiomes. ◄

▷ *L'intérêt d'introduire et étudier les modèles de ZFC tient à la possibilité de les utiliser pour démontrer à la fois des résultats positifs et négatifs.*

On a proposé au chapitre III d'axiomatiser la théorie des ensembles à l'aide du système de Zermelo–Fraenkel : l'analyse développée dans les chapitres I, II, et III suggère que les axiomes de ZF expriment des propriétés des ensembles que l'intuition et l'expérience accumulée recommandent de considérer comme vraies, et, mis à part l'ajout de l'axiome du choix AC au chapitre IV, aucun principe additionnel ne s'est pour le moment dégagé comme indispensable au développement de la théorie entamé dans le chapitre V. Il est donc naturel de poursuivre ce développement en cherchant à établir ou à réfuter à partir des axiomes de ZFC les questions laissées ouvertes, comme l'hypothèse du continu HC ou sa généralisation HCG.

Or, on a décrit au chapitre VII une notion de preuve pour les formules du premier ordre qui modélise la notion usuelle de démonstration (« proposition » VII.4.3). Comme le système ZFC est constitué exclusivement de formules du premier ordre de la logique $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$ (ou d'une extension par définition de celle-ci), et pour peu que le problème qu'on se propose d'étudier puisse être lui aussi exprimé par une formule F de $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$, la question

« *Peut-on démontrer* F *à partir de* ZFC *?* »
se formalise en
« *La formule* F *est-elle prouvable dans* $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$ *à partir de* ZFC *?* ».
Le théorème de complétude affirme alors l'équivalence de cette question avec la nouvelle question
« *La formule* F *est-elle satisfaite dans tout modèle de* ZFC *?* ».
Le bénéfice de la méthode sémantique, c'est-à-dire du passage par les modèles d'une théorie, en termes de commodité de rédaction est apparu plusieurs fois au cours des chapitres VII et VIII dans le cas de l'arithmétique, et on peut s'attendre à ce qu'il en aille de même dans le cas de la théorie des ensembles. On verra qu'il est spécialement important lorsqu'il s'agir d'établir des résultats négatifs, c'est-à-dire des résultats de non-prouvabilité. ◁

Proposition 1.12. (prouvabilité) *Supposons que* $\mathcal{P}$ *est une propriété exprimable par une formule ensembliste* F*. Alors il y a équivalence entre :*
(i) *la propriété* $\mathcal{P}$ *peut être démontrée à partir des axiomes de* ZF *;*
(ii) *la relation* ZF $\vdash$ F *est satisfaite ;*
(iii) *tout modèle de* ZF *satisfait* F *;*
(iv) *tout modèle dénombrable de* ZF *satisfait* F.

Démonstration. L'équivalence des points (i) et (ii) est informelle, et elle est une instance de la « proposition » VII.4.3. L'équivalence de (ii) avec (iii) et (iv) résulte du théorème de complétude, puisque ZF est une famille d'axiomes exprimés par des formules du premier ordre mettant en jeu une signature finie, à savoir la signature réduite à l'unique symbole de relation binaire ∈. □

Corollaire 1.13. (non prouvabilité) *Supposons que* $\mathcal{P}$ *est une propriété exprimable par une formule ensembliste* F*. Alors il y a équivalence entre :*
(i) *la propriété* $\mathcal{P}$ *ne peut pas être démontrée à partir des axiomes de* ZF *;*
(ii) *la relation* ZF $\vdash$ F *est fausse ;*
(iii) *il existe un modèle de* ZF *ne satisfaisant pas* F *;*
(iv) *il existe un modèle dénombrable de* ZF *ne satisfaisant pas* F.

▷ *Noter que l'équivalence de la proposition 1.12 est toujours valable, mais elle n'a d'intérêt pratique que si les système* ZF *est consistant : si* ZF *est contradictoire, alors toute formule* F *est prouvable à partir de* ZF*, et elle est satisfaite par défaut dans tout modèle de* ZF*, puisqu'un tel modèle n'existe pas.*

Dans la suite, on fera souvent appel à la méthode sémantique pour démontrer des résultats négatifs, en utilisant le corollaire 1.13. Un parallèle avec la théorie des corps devrait rendre la démarche claire. Notons T *les axiomes des corps, et soit* F *la formule* $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x})$ *exprimant la commutativité de la multiplication. On se demande si* F *est prouvable à partir de* T*. La réponse est, bien sûr, que ni* $\neg$F*, ni* F *ne sont prouvables à partir de* T*. Si on avait* T $\vdash \neg$F*, alors tout corps serait non commutatif, et, si on avait* T $\vdash$ F*, alors tout corps serait commutatif. Donc, pour démontrer qu'on n'a ni* T $\vdash \neg$F*, ni* T $\vdash$ F*, il suffit d'exhiber respectivement un corps commutatif et un corps non commutatif. Ceci est facile : sans même avoir à construire un corps ex nihilo, on peut partir d'un corps* K *quelconque, et observer d'une part que le sous-corps premier* K_0 *de* K *est toujours un corps commutatif, et, d'autre part, qu'on peut toujours construire une extension non commutative de* K_0*. On verra plus loin que c'est une démarche parallèle qui permet de montrer que ni la négation* $\neg$HC *de l'hypothèse du continu, ni celle-ci ne sont prouvables à partir de* ZFC *: partant d'un modèle* M *de* ZFC*, on peut toujours construire une sorte de sous-modèle premier* $L(M)$ *de* M *satisfaisant* HC*, puis une extension de* $L(M)$ *satisfaisant* $\neg$HC.

Un autre intérêt de l'étude des modèles de ZFC *est l'espoir de guider l'intuition et d'avancer dans notre perception des concepts ensemblistes. Depuis le premier théorème d'incomplétude de Gödel (proposition VIII.4.14), on sait qu'aucune axiomatisation par un système quel qu'il soit* *ne saurait être complète, mais ceci ne rend pas vaine la recherche d'axiomes additionnels pour la théorie des ensembles. En effet — et à la différence de ce qui se passe avec l'arithmétique et le système de Peano — on constatera bientôt que l'incomplétude de l'axiomatisation des ensembles par le système* ZFC *va bien au-delà de quelques formules de Gödel et concerne de nombreux énoncés élémentaires, à commencer par l'hypothèse du continu. Cette situation conduit à penser que le système de Zermelo–Fraenkel n'est qu'une première ébauche. Il est donc naturel de chercher un consensus pour des axiomes additionnels, dont la légitimation ne peut provenir que d'une connaissance approfondie des conséquences. Poursuivant l'analogie avec les corps, on peut comparer l'étude des ensembles purs à celle des nombres réels. A un moment donné, il peut exister un consensus sur le fait que les ensembles satisfont aux axiomes de* ZFC*, comme sur le fait que les réels satisfont aux axiomes des corps. Maintenant, les réels forment un corps très particulier, et, clairement, l'étude des corps généraux peut aider à discerner des propriétés additionnelles des réels que le fait d'être un corps ne suffit pas à capturer. On peut de même penser que les ensembles purs forment un modèle de* ZFC *très particulier, et espérer que l'étude des modèles généraux aidera à discerner les particularités de ce modèle qui nous échappent. L'étude et la classification des modèles de* ZF *ou de* ZFC *— qui est le pendant sémantique de l'étude et de la classification des axiomes pouvant être ajoutés à* ZF *— est donc la voie naturelle, l'espoir étant notamment qu'apparaissent des dichotomies où l'une des options recueille un consensus. Une des différences entre le monde des ensembles et celui des nombres réels est que les seconds sont plongés dans un univers mathématique plus vaste, par exemple celui de la théorie des ensembles qui fournit un cadre de démonstration global, alors que les ensembles purs sont à eux-mêmes leur propre cadre, ce qui prive de tout moyen de référence externe.* ◁

1.5. « Se placer dans un modèle de ZF ».

▶ Dans l'étude des modèles de ZF, il est commode de fixer un modèle de référence et d'étudier ce modèle et d'éventuels sous-modèles en le prenant comme cadre ambiant. Pour ce faire, on étend le formalisme de façon à pouvoir considérer des structures mettant en jeu des classes propres — mais il ne s'agit que de conventions d'écriture. ◀

▷ *Soit à étudier un certain modèle* $\mathcal{M}$ *de* ZF*, c'est-à-dire une structure* (M, E) *où* M *est un ensemble et* E *une relation binaire sur* M *et où les axiomes de* ZF *sont satisfaits dans* $\mathcal{M}$*. L'hypothèse que* $\mathcal{M}$ *est modèle de* ZFC *entraîne que* $\mathcal{M}$ *contient une contrepartie pour chacun des objets usuels des mathématiques. Ainsi, comme on l'a observé dans la section 1.1 avec le modèle d'Ackermann, il existe un élément de* M*, naturellement noté* $\emptyset^{\mathcal{M}}$*, qui est l'ensemble vide au sens du modèle* $\mathcal{M}$*, c'est-à-dire l'unique élément* a *de* M *qui a la propriété que, quel que soit* x *dans* M*, la relation* xEa *est fausse. De même, il existe dans* M *des éléments qui sont la contrepartie de* ω*, de* $\aleph_1$*, de* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R}))$*, etc. , et on les note de même* $\omega^{\mathcal{M}}$*, de* $\aleph_1^{\mathcal{M}}$ *ou* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R}))^{\mathcal{M}}$*. En particulier, l'interprétation dans* $\mathcal{M}$ *de la classe* $\mathbf{V}$ *de tous les ensembles purs est* M*, et celle de la classe* $\in$ *(vue comme une classe composée de couples) est* E*. Autrement dit, on a par définition*

$$\mathbf{V}^{\mathcal{M}} = M \quad \textit{et} \quad \in^{\mathcal{M}} = E. \tag{1.2}$$

De même que, lorsqu'on passe de l'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ *à celle d'un espace vectoriel* V *abstrait, on continue à appeler vecteurs les éléments de* V *alors que la notion référait au départ aux seuls vrais vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, il est commode et usuel, lorsqu'on étudie un modèle* $\mathcal{M}$ *de* ZFC*, d'adopter pour les éléments de* M *un vocabulaire ensembliste, appelant ensembles les éléments de* M*, et, pour* a, b *dans* M*, qualifiant* a *d'élément de* b *si* aEb *est vrai, et, de même appelant* ω *l'élément de* $\mathcal{M}$ *qui est la contrepartie de* ω*. En d'autres termes, on omet la référence au modèle* $\mathcal{M}$*, ce qu'on résume en déclarant qu'on « se place dans le modèle* $\mathcal{M}$ *». Cette convention est très utile pour alléger les notations et permettre d'étudier ensuite des modèles dérivés de* $\mathcal{M}$*, typiquement des sous-modèles. Dans ce contexte, le modèle* $\mathcal{M}$ *de référence est naturellement désigné comme le modèle* $(\mathbf{V}, \in)$ *: lorsqu'on s'est placé dans* $\mathcal{M}$*, alors, d'après* (1.2)*, c'est la façon naturelle de référer à* $\mathcal{M}$ *de l'intérieur. Une fois un tel contexte adopté, il est cohérent* *d'utiliser, pour* F *formule ensembliste, la notation* $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}$ *— ou simplement* $\mathbf{V} \models \mathsf{F}$ *par abus — comme synonyme de* $\mathcal{M} \models \mathsf{F}$*, et c'est ce qu'on fera dans la suite.*

Noter que cet usage ne signifie pas qu'on étend la notion de réalisation d'une logique du premier ordre au cas où le domaine serait une classe propre et non plus un ensemble : une telle extension ne serait pas impossible, mais elle nécessiterait de modifier les énoncés de plusieurs résultats établis, notamment le théorème de complétude, pour préciser qu'on n'y considère que des structures dont le domaine est un ensemble, et ce n'est pas l'option retenue ici. En particulier, puisque les ensembles purs ne forment pas un ensemble, on ne se place pas dans une hypothétique structure formée par les vrais ensembles purs et la vraie appartenance : ceci n'empêche pas que, dès lors que tous les axiomes de ZF *sont satisfaits par les ensembles purs, toute formule ensembliste* F *conséquence de* ZF *soit satisfaite par les ensembles purs, ce qui serait cohérent avec la notation* $\mathbf{V} \models \mathsf{F}$*, mais, ici, on n'utilisera la notation que dans le contexte d'un modèle* $\mathcal{M}$*, dont, par définition, le domaine est un ensemble.*

Par contre, dans le cadre d'un modèle $\mathcal{M}$*, il n'y a pas de difficulté à donner un sens à une expression du type* $(\mathbf{C}, \mathbf{R}) \models \mathsf{F}$ *dès que* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{R}$ *sont des classes définissables.* ◁

Définition 1.14. (relativisation) Supposons que $\mathbf{C}$ est une classe définie par la formule $\mathsf{G}(\boldsymbol{x})$, et que $\mathbf{R}$ est une classe relationnelle définie par une formule $\mathsf{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Pour toute formule ensembliste F, on note $\mathsf{F}^{(\mathbf{C},\mathbf{R})}$ la formule ensembliste, appelée *relativisation* de F à $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$, obtenue en remplaçant $\exists \boldsymbol{x}(\dots)$ par $\exists \boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\boldsymbol{x}) \wedge \dots)$, $\forall \boldsymbol{x}(\dots)$ par $\forall \boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \dots)$, et $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y}$ par $\mathsf{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ partout dans F. On note alors $(\mathbf{C}, \mathbf{R}) \models \mathsf{F}$ pour $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}^{(\mathbf{C},\mathbf{R})}$.

Lemme 1.15. (*i*) *Avec les notations de la définition précédente, la relation* $(\mathbf{C}, \mathbf{R}) \models \mathsf{F}$ *ne dépend pas du choix des formules définissant* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{R}$.

(*ii*) *Si le modèle de référence est* $\mathcal{M}$*, alors, pour toute formule* F *de* $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$*, la relation* $(\mathbf{C}, \mathbf{R}) \models \mathsf{F}$ *au sens de la définition 1.14 équivaut à* $(\mathbf{C}^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}) \models \mathsf{F}$ *au sens usuel de la définition VII.1.17.*

Démonstration. Dans les deux cas, la vérification est une induction immédiate par induction sur la complexité de la formule F. Pour (*ii*), $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^{\mathcal{M}}$ et $\boldsymbol{x}\ R^{\mathcal{M}}\ \boldsymbol{y}$ équivalent respectivement aux formules $\mathcal{M} \models \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}$ et $\mathcal{M} \models \boldsymbol{x}\ \mathbf{R}\ \boldsymbol{y}$, et, pour les quantifications, dans tous les cas, il s'agit de faire varier les arguments sur $\mathbf{C}^{\mathcal{M}}$. □

▷ *On pourra donc utiliser sans problème ni état d'âme des notations du type* $(\mathbf{C}, \mathbf{R}) \models \mathsf{F}$ *même lorsque* $\mathbf{C}$ *est une classe propre, typiquement la classe* $\mathbf{V}$ *de tous les ensembles purs, en se rappelant qu'il ne s'agit que d'une convention commode, et non d'une extension subreptice du cadre logique ambiant.* ◁

2. Modèles transitifs

▶ On établit des critères permettant de décider si, $\mathbf{M}$ étant une classe ou un ensemble transitif, la structure $(\mathbf{M}, \in)$ est modèle de tout ou partie de ZFC, et, dans ce cas, on compare les interprétations des diverses opérations et relations ensemblistes dans les deux modèles $(\mathbf{V}, \in)$ et $(\mathbf{M}, \in)$. Le cas favorable est celui des notions dites absolues, qui donnent lieu aux mêmes interprétations. On montre l'absoluité de toute notion exprimable à l'aide de formules suffisamment simples, typiquement les formules Δ_0 dont toutes les quantifications sont bornées. ◀

▷ *La proposition 1.8 ôtant tout espoir de construire ex nihilo un modèle de* ZF*, l'étude des modèles de* ZFC *consiste non pas à construire de tels modèles, mais à les modifier, à savoir à chercher à construire de nouveaux modèles à partir d'un modèle déjà existant, typiquement par restriction, déformation, transformations diverses. La notion la plus simple et la plus naturelle est celle de sous-modèle d'un modèle* $\mathcal{M}$*, à savoir un modèle* $\mathcal{M}'$ *tel que* $\mathrm{Dom}(\mathcal{M}')$ *est inclus dans* $\mathrm{Dom}(\mathcal{M})$ *et* $\in^{\mathcal{M}'}$ *est la restriction de* $\in^{\mathcal{M}}$ *à* $\mathrm{Dom}(\mathcal{M}')$*. Des résultats analogues à ceux de la section VIII.3 garantissent que les deux structures partagent automatiquement de nombreuses propriétés, spécialement dans le cas où* $\mathcal{M}$ *est extension finale de* $\mathcal{M}'$*.* ◁

2.1. Premiers critères.

▶ On établit des critères permettant de reconnaître quand une structure du type $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$ avec $\mathbf{M}$ classe transitive satisfait certains axiomes de ZFC. ◀

▷ *On se propose d'étudier les sous-modèles d'un modèle* $\mathcal{M}$ *de* ZF*. Conformément à l'option de rédaction « se placer dans un modèle* $\mathcal{M}$ *» décrite dans la section 1.5, il s'agit donc d'étudier des sous-structures de* $(\mathbf{V}, \in)$ *qui sont de la forme* $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$ *avec* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$*. Un cas particulier important est celui où* $\mathbf{M}$ *est un ensemble ou une classe transitif, c'est-à-dire clos par appartenance, car alors* $(\mathbf{V}, \in)$ *est une extension* $\in$*-finale de* $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$*.* ◁

Convention 2.1. Dans toute la suite, on suppose fixé un modèle $\mathcal{M}$ de ZF, et on se place dans ce modèle. On a donc $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}$ pour toute formule F prouvable à partir de ZF.

Pour simplifier les notations, on écrit simplement $(\mathbf{M}, \in)$ pour $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$, et $\mathsf{F}^{\mathbf{M}}$ pour $\mathsf{F}^{(\mathbf{M},\in)}$ [2]. On rappelle qu'un ensemble M est dit transitif si tout élément d'un élément de M est dans M ; on étend ce vocabulaire aux classes: une classe $\mathbf{M}$ est dite *transitive* si tout élément d'un élément de $\mathbf{M}$ est dans $\mathbf{M}$.

Lemme 2.2. *Supposons que* $\mathbf{M}$ *est une classe transitive.*

(i) Les axiomes d'extensionnalité et de fondation sont satisfaits dans $(\mathbf{M}, \in)$ *;*

(ii) L'axiome de la paire (resp. de l'union, resp. des parties) est satisfait dans $(\mathbf{M}, \in)$ *si et seulement si, quels que soient* a, b *dans* $\mathbf{M}$*, il existe* c *dans* $\mathbf{M}$ *tel que* $\{a, b\}$ *(resp.* $\bigcup a$*, resp.* $\mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M}$*) est inclus dans* c *;*

(iii) Les axiomes de séparation sont satisfaits dans $(\mathbf{M}, \in)$ *si et seulement si, pour chaque formule ensembliste* $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \vec{\boldsymbol{z}})$ *et chaque choix de* a *et* $\vec{c}$ *dans* $\mathbf{M}$*, l'ensemble* $\{\boldsymbol{x} \in a\,;\, \mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \vec{c})\}$ *appartient à* $\mathbf{M}$ *; en particulier, une condition suffisante est que, pour tout* a *dans* $\mathbf{M}$*, tout sous-ensemble de* a *soit dans* $\mathbf{M}$*.*

(iv) Les axiomes de remplacement sont satisfaits dans $(\mathbf{M}, \in)$ *si et seulement si, pour chaque formule* $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{z}})$ *et chaque choix de* a *et* $\vec{c}$ *dans* $\mathbf{M}$ *vérifiant* $\forall \boldsymbol{x}{\in}a\, \exists! \boldsymbol{y}\, (\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c}))$*, il existe* b *dans* $\mathbf{M}$ *tel que* $\{\boldsymbol{y}\,;\, \exists \boldsymbol{x}{\in}a(\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c})\}$ *est inclus dans* b*.*

Démonstration. (*i*) Par définition, $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome d'extensionnalité si et seulement si la formule

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'{\in}\mathbf{M}\, (\forall \boldsymbol{y}{\in}\mathbf{M}\, (\boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{x}') \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}') \tag{2.1}$$

[2] ce qui est raisonnable puisque, dans ce cas, on restreint seulement le domaine des variables mais on ne change pas la relation d'appartenance par rapport à la structure de référence $(\mathbf{V}, \in)$

est satisfaite. Or, $\mathbf{M}$ étant transitive, pour a, a' dans $\mathbf{M}$, tous les éléments de a et a' sont dans $\mathbf{M}$, et donc il y a équivalence entre $\forall \boldsymbol{y}{\in}\mathbf{M}\,(\boldsymbol{y}{\in}a \Leftrightarrow \boldsymbol{y}{\in}a')$ et $\forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{y}{\in}a \Leftrightarrow \boldsymbol{y}{\in}a')$. Comme l'axiome d'extensionnalité est satisfait dans $(\mathbf{V}, \in)$, la dernière condition entraîne $a = a'$, et donc (2.1) est satisfaite.

Par ailleurs, soit a quelconque dans $\mathbf{M}$. Puisque AF est satisfait dans $(\mathbf{V}, \in)$, il existe dans a un élément b de rang minimal. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, b est dans $\mathbf{M}$, et aucun élément de b ne peut appartenir à a, donc, au sens de $(\mathbf{M}, \in)$, l'élément b est minimal dans a. Par conséquent, $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome de fondation.

(ii) D'abord, l'axiome de la paire est satisfait dans $(\mathbf{M}, \in)$ si et seulement si, pour tous a, b dans $\mathbf{M}$, il existe c dans $\mathbf{M}$ contenant a et b, au sens de $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$ donc au sens de $(\mathbf{V}, \in)$, donc incluant $\{a, b\}$ au sens de $(\mathbf{V}, \in)$. Ensuite, l'axiome de l'union est satisfait dans $(\mathbf{M}, \in)$ si et seulement si, pour tout a dans $\mathbf{M}$, il existe dans $\mathbf{M}$ un ensemble b contenant tous les éléments des éléments de a, au sens de $\mathbf{M}$. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, les éléments des éléments de a au sens de $\mathbf{M}$ sont les éléments des éléments de a, dont l'ensemble est $\bigcup a$, et donc l'axiome est satisfait si et seulement si il existe dans $\mathbf{M}$ un ensemble incluant $\bigcup a$. Enfin, l'axiome des parties est satisfait dans $(\mathbf{M}, \in)$ si et seulement si, pour tout a dans $\mathbf{M}$, il existe dans $\mathbf{M}$ un ensemble b contenant toutes les parties de a, au sens de $\mathbf{M}$. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, un élément x de $\mathbf{M}$ est inclus dans a au sens de $\mathbf{M}$, c'est-à-dire qu'on a $(\mathbf{M}, \in) \models \forall \boldsymbol{y}{\in}x(\boldsymbol{y}{\in}a)$, si et seulement si x est inclus dans a au sens de $\mathbf{V}$, et donc il s'agit pour b de contenir toutes les parties de a qui sont dans $\mathbf{M}$, c'est-à-dire d'inclure $\mathfrak{P}(A) \cap \mathbf{M}$.

(iii) La structure $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome de séparation pour F si, quels que soient a et $\vec{c}$ dans $\mathbf{M}$, il existe b dans $\mathbf{M}$ vérifiant $\forall \boldsymbol{x}{\in}\mathbf{M}\,(\boldsymbol{x} \in b \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \vec{c})))$. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, la condition équivaut à $\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \in b \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \in a \wedge \mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \vec{c})))$, car tout élément de a est dans $\mathbf{M}$, donc l'ensemble b ne peut être que $\{\boldsymbol{x} \in a\,;\, \mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{x}, \vec{a})\}$.

(iv) L'argument est le même qu'en (ii), en tenant compte à nouveau du fait la transitivité de $\mathbf{M}$ garantit que tous les éléments de a sont dans $\mathbf{M}$. □

Une application directe des critères précédents donne :

PROPOSITION 2.3. (V_ω) *La structure* $(V_\omega, \in)$ *est un modèle de* $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}}$.

DÉMONSTRATION. L'ensemble V_ω est transitif par construction. On a vu au chapitre III que, pour a, b dans V_ω, les ensembles $\{a, b\}$, $\bigcup a$, $\mathfrak{P}(a)$ sont tous éléments de V_ω. Par le lemme 2.2, on déduit que $(V_\omega, \in)$ satisfait à tous les axiomes de $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$. Pour les axiomes de remplacement, supposons $a \in V_\omega$ et $\forall \boldsymbol{x}{\in}a\, \exists! \boldsymbol{y}\, (\mathsf{F}^{V_\omega}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c}))$. Soit $b := \{\boldsymbol{y}; \exists \boldsymbol{x}{\in}a(\mathsf{F}^{V_\omega}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c})\}$. Par construction, b est inclus dans V_ω, et il est fini puisqu'il existe une surjection de a sur b. Donc b est inclus dans un certain V_n, lequel est un élément de V_ω. Donc, d'après le lemme 2.2(iv), les axiomes de remplacement sont satisfaits dans $(V_\omega, \in)$. □

2.2. Formules et opérations absolues.

► On introduit les notions de formule, de relation et d'opération absolues pour une classe (transitive) $\mathbf{M}$, dont on donne comme exemple l'inclusion et l'union. ◄

▷ *Lorsqu'une classe transitive* $\mathbf{M}$ *est un modèle de* ZF, *chacune des notions ensemblistes a une interprétation dans le modèle* $(\mathbf{V}, \in)$ *et dans le modèle* $(\mathbf{M}, \in)$. *A priori, ces interprétations sont distinctes, puisqu'elles ne réfèrent pas à la même structure. Pourtant, certaines notions ont nécessairement la même interprétation : par exemple, on va voir que, sous des hypothèses très faibles, l'interprétation de l'ordinal* ω *doit être la même dans les deux structures. On appelle* ***absolue*** *pour une classe* $\mathbf{M}$ *une notion qui a la même interprétation dans le modèle de référence* $(\mathbf{V}, \in)$ *et dans la structure* $(\mathbf{M}, \in)$ *: sa valeur ne dépend pas du modèle où on l'évalue. Ainsi, on verra plus loin que l'ordinal* ω *est absolu pour toute classe transitive.*

Les résultats d'absoluité jouent un rôle important en théorie des ensembles. Par exemple, pour montrer qu'une classe transitive $\mathbf{M}$ *satisfait l'axiome de l'infini, il faut montrer que* $(\mathbf{M}, \in)$ *satisfait l'assertion « ω existe », c'est-à-dire « il existe un plus petit ordinal récurrent ». Il s'agit donc au départ de chercher, a priori n'importe où dans* $\mathbf{M}$*, un objet qui, au sens de* $\mathbf{M}$*, soit le plus petit ordinal récurrent. Une fois qu'on sait que ω est absolu, l'objet $\omega^{\mathbf{M}}$, s'il existe, est nécessairement ω, et la question de savoir si* $(\mathbf{M}, \in)$ *satisfait l'axiome de l'infini se réduit à celle de savoir si ω est ou non dans* $\mathbf{M}$. $\triangleleft$

Définition 2.4. (absolu) Une formule ensembliste $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})$ est dite *absolue* pour une classe $\mathbf{M}$ si, quels que soient $\vec{a}$ dans $\mathbf{M}$, il y a équivalence entre $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}(\vec{a})$ et $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}(\vec{a})$. Une relation $\mathbf{R}$ définie par une formule F est dite *absolue* pour $\mathbf{M}$ si F l'est. Une opération (c'est-à-dire une classe fonctionnelle) définie par une formule $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ est dit *absolue* pour $\mathbf{M}$ si la formule $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}))$ l'est, et si, de surcroît, $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait $\forall \vec{\boldsymbol{x}}\, \exists! \boldsymbol{y}\, (\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}))$.

On commence par deux exemples faciles.

Lemme 2.5. *La relation $\subseteq$ est absolue pour toute classe transitive. L'opération $\bigcup$ est absolue pour toute classe transitive vérifiant les axiomes d'union et de séparation.*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{M}$ est une classe transitive. Soient a, b des éléments de $\mathbf{M}$. Puisque $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$ est $\forall \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{y})$, il s'agit de comparer $\forall \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z} \in a \Rightarrow \boldsymbol{z} \in b)$ et sa version relativisée à $\mathbf{M}$, c'est-à-dire $\forall \boldsymbol{z}{\in}\mathbf{M}(\boldsymbol{z} \in a \Rightarrow \boldsymbol{z} \in b)$. Que la première condition implique la seconde est clair. Qu'inversement la seconde implique la première résulte de la transitivité de $\mathbf{M}$: puisque a est dans $\mathbf{M}$, tout élément de a est dans $\mathbf{M}$.

Supposons en outre que $(\mathbf{M}, \in)$ satisfasse les axiomes de l'union et de séparation, et soit a un élément de $\mathbf{M}$. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome d'extensionnalité, et donc il existe un unique b dans $\mathbf{M}$ qui est l'ensemble des éléments des éléments de a calculé dans $\mathbf{M}$, c'est-à-dire qui est défini par $(\mathbf{M}, \in) \models \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \in b \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \in a))$, donc par

$$(\mathbf{V}, \in) \models \forall \boldsymbol{x}{\in}\mathbf{M}(\boldsymbol{x} \in b \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y}{\in}\mathbf{M}(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \in a)). \tag{2.2}$$

Soit c un élément quelconque de b. Puisque $\mathbf{M}$ est transitive et que b est dans $\mathbf{M}$, il en est de même de c, donc, par (2.2), il existe d dans a tel que c est dans d. On a donc $c \in \bigcup a$, d'où $b \subseteq \bigcup a$. Inversement, supposons $c \in \bigcup a$. Par définition, il existe un élément d de a dont c est élément. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, d, puis c, sont dans $\mathbf{M}$, et donc, par (2.2), c est dans b. On a donc $\bigcup a \subseteq b$, et, finalement, $b = \bigcup a$, ce qui montre l'absoluité de l'union. $\square$

Notation 2.6. (opération) Si $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait $\forall \vec{\boldsymbol{x}}\ \exists! \boldsymbol{y}\ (\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}))$, et si $\mathbf{F}$ est l'opération définie par $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$, alors, pour $\vec{a}$ dans $\mathbf{M}$, on note $\mathbf{F}^{\mathbf{M}}(\vec{a})$ l'unique élément b de $\mathbf{M}$ pour lequel on a $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}(\vec{a}, b)$.

Dire que $\mathbf{F}$ est absolue pour $\mathbf{M}$ signifie alors que, pour tout $\vec{a}$ dans $\mathbf{M}$, on a $\mathbf{F}^{\mathbf{M}}(\vec{a}) = \mathbf{F}(\vec{a})$: qu'on la calcule dans $(\mathbf{V}, \in)$ ou dans $(\mathbf{M}, \in)$, la valeur de $\mathbf{F}(\vec{a})$ est la même. Par exemple, le lemme 2.5 montre que, si $\mathbf{M}$ est une classe transitive satisfaisant les axiomes d'union et de séparation, alors, pour tout a dans $\mathbf{M}$, on a $\bigcup^{\mathbf{M}} a = \bigcup a$.

$\triangleright$ *Les exemples du lemme 2.5 pourraient suggérer que toutes les opérations ensemblistes sont alsolues. Il n'en est rien. Pour le moment, on peut seulement observer que l'argument de la démonstration du lemme 2.5 ne fonctionne pas toujours. Considérons par exemple* $\boldsymbol{y} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{x})$, *définie par* $\forall \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{z} \subseteq \boldsymbol{x})$*. Si* $\mathbf{M}$ *est transitive et que* $(\mathbf{M}, \in)$ *satisfait l'axiome des parties, il existe pour tout* a *dans* $\mathbf{M}$ *un ensemble* b *dans* $\mathbf{M}$ *satisfaisant* $\forall \boldsymbol{z}{\in}\mathbf{M}(\boldsymbol{z} \in b \Leftrightarrow \boldsymbol{z} \subseteq^{\mathbf{M}} a)$*, qu'il s'agit de comparer avec* $\forall \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z} \in b \Leftrightarrow \boldsymbol{z} \subseteq a)$*. On a vu que* $c \subseteq^{\mathbf{M}} a$ *équivaut à* $c \subseteq a$ *pour* a, c *dans* $\mathbf{M}$*. Par contre, il n'y a aucune raison pour que, pour* a *dans* $\mathbf{M}$*, la relation* $c \subseteq a$ *implique* $c \in \mathbf{M}$*, et l'argument n'aboutit pas. Il n'est donc pas clair que l'opération* $\mathfrak{P}$ *soit absolue*[3]. ◁

Les notions absolues se composent au sens suivant :

LEMME 2.7. *Supposons que* $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ *est une formule absolue pour* $\mathbf{M}$*, et que* $\mathbf{G}$ *est une opération absolue pour* $\mathbf{M}$*. Alors la formule* $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \mathbf{G}(\vec{\boldsymbol{x}}))$ *est absolue pour* $\mathbf{M}$*.*

DÉMONSTRATION. Soient $\vec{a}$ des éléments de $\mathbf{M}$, et soit $b = \mathbf{G}(\vec{a})$. Comme $\mathbf{G}$ est absolue pour $\mathbf{M}$, on a $b = \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(\vec{a})$, donc en particulier $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(\vec{a}) \in \mathbf{M}$. Comme F est absolue pour $\mathbf{M}$, les formules $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ et $\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$ sont équivalentes, et en particulier $\mathsf{F}(\vec{a}, b)$ équivaut à $\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\vec{a}, b)$. Or cette dernière relation est aussi $\mathsf{F}^{\mathbf{M}}(\vec{a}, \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(\vec{a}))$, qui est la relativisation à $\mathbf{M}$ de $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}, \mathbf{G}(\vec{\boldsymbol{x}}))$ évaluée en $\vec{a}$. □

2.3. Formules Δ_0.

► On établit l'absoluité de toute opération ou relation possédant une définition syntaxiquement simple, à savoir une définition ne mettant en jeu que des quantifications bornées. ◄

▷ *Dans le paragraphe précédent, on a vérifié par un argument spécifique direct que l'inclusion ou l'union sont absolues pour certaines classes transitives. De nombreuses notions ensemblistes sont absolues vis-à-vis des classes transitives satisfaisant un minimum d'axiomes de* ZF*, et il est indispensable de disposer de critères généraux permettant de reconnaître le phénomène.*

Or, on a établi dans la section VIII.3.2 un tel critère, en l'occurrence dans le contexte des modèles de l'arithmétique faible $\mathsf{PA}_{\text{faible}}$*, en montrant que les formules de complexité* Δ_0 *(et* Σ_1*) sont préservées par extension finale. Dans le contexte de l'arithmétique, on a utilisé le résultat pour passer du modèle* $(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, \leqslant)$ *à un modèle quelconque de* $\mathsf{PA}_{\text{faible}}$*. Le contexte présent est différent, mais la situation est similaire, et c'est le même principe de préservation par extension finale des formules* Δ_0 *qu'on va exploiter.* ◁

LEMME 2.8. *Soit* $\mathbf{M}$ *une classe quelconque. Alors* $(\mathbf{V}, \in)$ *est extension* $\in$*-finale de* $(\mathbf{M}, \in)$ *si et seulement si* $\mathbf{M}$ *est une classe transitive.*

DÉMONSTRATION. Par définition, dire que $(\mathbf{V}, \in)$ est extension finale de $(\mathbf{M}, \in)$ signifie que $a \in b \in \mathbf{M}$ implique $a \in \mathbf{M}$: c'est précisément la définition de la transitivité de $\mathbf{M}$. □

DÉFINITION 2.9. (formule Δ_0 et Δ_0^{T}) (i) Une formule de $\mathfrak{L}_{\text{ens}}$ est dite *de complexité* Δ_0 si toutes les quantifications qui y figurent sont des quantifications bornées $\exists \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{y}$ et $\forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{y}$.

(ii) Si T est une famille de formules de $\mathfrak{L}_{\text{ens}^+}$, une formule F de $\mathfrak{L}_{\text{ens}^+}$ est dite *de complexité* Δ_0^{T} si T prouve $\mathsf{F} \Leftrightarrow \mathsf{F}'$ pour au moins une formule F' de complexité Δ_0.

▷ *On notera que la notion de formule* Δ_0 *ne concerne que des formules ensemblistes au sens strict, c'est-à-dire ne mettant en jeu que la relation d'appartenance, à l'exclusion de tout autre symbole dérivé. Le résultat fondamental est que les formules* Δ_0^{T} *sont absolues pour les modèles transitifs de* T. ◁

[3]Ceci, bien sûr, ne suffit pas à montrer que l'opération $\mathfrak{P}$ n'est pas absolue : ceci ne pourra être fait que lorsque la méthode du forcing du chapitre **??** permettra de construire des modèles dont on puisse contrôler le degré de désaccord.

Lemme 2.10. *Supposons que* T *est une famille de formules de* $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}^+}$ *satisfaites dans* $(\mathbf{V}, \in)$. *Alors toute formule* Δ_0^{T} *est absolue pour toute classe transitive modèle de* T.

Démonstration. On observe d'abord que les formules Δ_0 sont absolues pour toutes les classes transitives. La démonstration a déjà été faite au chapitre VIII, on en rappelle seulement le principe. Soit $\mathbf{M}$ une classe transitive. Si F est une formule sans quantificateur, alors F coïncide avec $\mathsf{F}^{\mathbf{M}}$, donc F est absolue pour $\mathbf{M}$. Supposons que $\mathsf{F}(\boldsymbol{y})$ est $\exists \boldsymbol{x} {\in} \boldsymbol{y}(\mathsf{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$. Si b est dans $\mathbf{M}$ et que $(\mathbf{V}, \in)$ satisfait $\exists \boldsymbol{x} {\in} b(\mathsf{G}(\boldsymbol{x}, b))$, il existe a tel que $(\mathbf{V}, \in)$ satisfait $a \in b$ et $\mathsf{G}(a, b)$, et, comme $\mathbf{M}$ est transitive, l'élément a appartient à $\mathbf{M}$ puisqu'il appartient à b qui est dans $\mathbf{M}$. Donc F entraîne $\mathsf{F}^{\mathbf{M}}$. L'autre implication est triviale, et le cas de $\forall$ est symétrique.

Supposons maintenant que T est satisfaite dans $(\mathbf{V}, \in)$ et prouve $\mathsf{F} \Leftrightarrow \mathsf{F}'$, où F' est Δ_0. Supposons que $\mathbf{M}$ est transitive et que $(\mathbf{M}, \in)$ est modèle de T. Alors $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}$ équivaut à $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}'$ puisque $(\mathbf{V}, \in)$ est modèle de T, et, de même, $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}$ équivaut à $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}'$ puisque $(\mathbf{M}, \in)$ est modèle de T. D'après ce qui précède, $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}'$ équivaut à $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}'$, donc $(\mathbf{V}, \in) \models \mathsf{F}$ équivaut à $(\mathbf{M}, \in) \models \mathsf{F}$. □

Il est facile d'établir de proche en proche l'absoluité d'un grand nombre de notions ensemblistes élémentaires.

Définition 2.11. (système Z^-) On écrit Z^- pour $\mathsf{Z}{-}\mathsf{Par}{-}\mathsf{Inf}$: ainsi, Z^- contient les axiomes d'extensionnalité, de la paire, de l'union et de séparation.

Proposition 2.12. (absoluité) *Les formules et opérations suivantes sont absolues pour toutes les classes transitives qui sont modèles de* Z^- : $\{\bullet, \bullet\}$, $\bigcup$, $\cup$, $(\bullet, \bullet)$, $\emptyset$, S, « $\boldsymbol{x}$ *est transitif* », « $\boldsymbol{\alpha}$ *est un ordinal* », « $\boldsymbol{\alpha}$ *est un ordinal limite* », « $\boldsymbol{\alpha}$ *est un ordinal successeur* », « $\boldsymbol{\alpha}$ *est un ordinal fini* », « $\boldsymbol{R}$ *est une relation binaire sur* $\boldsymbol{A}$ », « $\boldsymbol{f}$ *est une fonction de* $\boldsymbol{A}$ *dans* $\boldsymbol{B}$ », « $\boldsymbol{f}$ *est une bijection de* $\boldsymbol{A}$ *sur* $\boldsymbol{B}$ ».

Démonstration. Les axiomes de Z^- garantissent l'existence et l'unicité des paires. Or $\boldsymbol{z} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ est, par définition, la formule

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{z} \wedge \forall \boldsymbol{t} {\in}\, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{t} = \boldsymbol{y}),$$

qui est Δ_0. Le lemme 2.10 garantit donc que l'opération « paire » est absolue pour les classes transitives modèles de Z^-. Le cas de l'union est semblable — et a déjà été traité dans le lemme 2.5. Notons que $\boldsymbol{y} = \bigcup \boldsymbol{x}$ est équivalent à la formule

$$\forall \boldsymbol{z} {\in}\, \boldsymbol{x}\, \forall \boldsymbol{t} {\in}\, \boldsymbol{z}\, (\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{y}) \wedge \forall \boldsymbol{t} {\in}\, \boldsymbol{y}\, \exists \boldsymbol{z} {\in}\, \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{z}),$$

qui est Δ_0. Pour l'union de deux ensembles, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y}$ équivaut à la formule Δ_0

$$\forall \boldsymbol{t} {\in}\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{z}) \wedge \forall \boldsymbol{t} {\in}\, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} \wedge \forall \boldsymbol{t} {\in}\, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{y}).$$

Pour le couple, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est, par définition, $\boldsymbol{z} = \{\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}, \{\boldsymbol{x}\}\}$, et donc, d'après le lemme 2.7, elle est absolue comme composée d'opérations absolues. Ensuite $\boldsymbol{x} = \emptyset$ est équivalente à

$$\forall \boldsymbol{y} {\in}\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}),$$

qui est Δ_0. Puis $\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{x})$, qui est $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cup \{\boldsymbol{x}\}$, est absolue comme composée d'opérations absolues. Le point suivant est « $\boldsymbol{x}$ est transitif », qui est exprimée par

$$\forall \boldsymbol{y} {\in}\, \boldsymbol{x}\, \forall \boldsymbol{z} {\in}\, \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{x}),$$

à nouveau une formule Δ_0. En présence de l'axiome de fondation, « $\boldsymbol{\alpha}$ est un ordinal » équivaut à « $\boldsymbol{\alpha}$ est transitif et totalement ordonné par $\in$ », ce qui s'exprime par la formule Δ_0

$$\text{« }\boldsymbol{\alpha}\text{ est transitif »} \wedge \forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}{\in}\boldsymbol{\alpha}\, (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{z})$$
$$\wedge \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{\alpha}\, (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x})\,;$$

la propriété est donc absolue pour toute classe transitive vérifiant l'axiome de fondation, donc pour toute classe transitive, puisque, d'après le lemme 2.2(i), AF est toujours satisfait dans une telle classe. Ensuite « $\boldsymbol{\alpha}$ est un ordinal limite » équivaut à

$$\text{« }\boldsymbol{\alpha}\text{ est un ordinal »} \wedge \forall \boldsymbol{\beta}{\in}\boldsymbol{\alpha}\, \exists \boldsymbol{\gamma}{\in}\boldsymbol{\alpha}\, (\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\gamma}),$$

donc est exprimable par une formule Δ_0. Ensuite, α est un ordinal successeur si et seulement α est un ordinal qui n'est ni $\emptyset$, ni limite, une notion absolue comme combinaison booléenne de notions absolues. Et α est un ordinal fini si et seulement si α est un ordinal et aucun élément de α n'est un ordinal limite.

Ensuite,« $\boldsymbol{R}$ est une relation binaire sur $\boldsymbol{A}$ » est exprimé par

$$\forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{R}\ \exists \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}{\in}\ \boldsymbol{A}\, (\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})),$$

une formule $\Delta_0^{\mathsf{Z}^-}$, équivalente en présence des axiomes de Z^- à une formule Δ_0 obtenue en remplaçant l'opération « couple » par sa définition. De même, « $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ » est exprimé par

$$\text{« }\boldsymbol{f}\text{ est une relation binaire sur }\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\text{ »}$$
$$\wedge \forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{A}\, \forall \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}{\in}\boldsymbol{B}\, ((((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f} \wedge (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{f})){\Rightarrow}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}),$$

qui est $\Delta_0^{\mathsf{Z}^-}$. Enfin, « $\boldsymbol{f}$ est une bijection de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{B}$ » correspond à

$$\text{« }\boldsymbol{f}\text{ est une fonction de }\boldsymbol{A}\text{ dans }\boldsymbol{B}\text{ »}$$
$$\wedge \forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{A}\, \exists \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{B}\, ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}) \wedge \forall \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{B}\, \exists \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{A}\, ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}),$$

qui est aussi $\Delta_0^{\mathsf{Z}^-}$. □

Corollaire 2.13. *Supposons que* $\mathbf{M}$ *est une classe transitive qui est modèle de* Z^-. *Alors* $(\mathbf{M}, \in)$ *satisfait l'axiome de l'infini si et seulement si* ω *appartient à* $\mathbf{M}$, *et, dans ce cas,* $\omega^{\mathbf{M}}$ *est* ω.

Démonstration. Si $\mathbf{M}$ contient ω, alors, par absoluité, $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait « ω est un ordinal limite », donc « il existe un ordinal limite », et, par conséquent, $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome de l'infini. Inversement, si $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait l'axiome de l'infini, c'est qu'il existe un élément a de $\mathbf{M}$ tel que $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait « a est un ordinal limite, et c'est le plus petit ». Par absoluité, $(\mathbf{V}, \in)$ satisfait la même formule, donc a ne peut être que ω. □

▷ *Encore une fois, on veillera à ne pas hâtivement conclure que toutes les opérations et relations ensemblistes sont exprimables par des formules* Δ_0 *et de là absolues pour toute classe transitive satisfaisant suffisamment d'axiomes de* ZFC. *Un exemple typique est l'opération* $\mathfrak{P}$, *déjà considéré plus haut, car la définition naturelle de* $\boldsymbol{y} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{x})$, *à savoir*

$$\forall \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z} \subseteq \boldsymbol{x}{\Rightarrow}\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{y}) \wedge \forall \boldsymbol{z}{\in}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z} \subseteq \boldsymbol{x})$$

n'est pas une formule Δ_0. *Evidemment, ceci n'empêche a priori pas l'existence d'une autre formule qui, elle, serait* Δ_0^{ZF}, *et, plus généralement, ceci ne prouve pas que l'opération* $\mathfrak{P}$ *n'est pas absolue.* ◁

2.4. Sous-modèles transitifs.

► Grâce aux résultats d'absoluité établis dans la section précédente, on peut comparer deux modèles de ZF dont l'un est un sous-modèle transitif de l'autre, et établir en particulier que de nombreuses notions ont la même interprétation dans les deux modèles. ◄

▷ *Lorsqu'on a vérifié qu'une certaine classe transitive* $\mathbf{M}$ *est un modèle de* ZF [4]*, chaque notion ensembliste a deux interprétations, à savoir une au sens du modèle* $\mathbf{V}$*, et une au sens du modèle* $\mathbf{M}$*. Comparer ces deux interprétations est la première étape en vue d'analyser le sous-modèle. On peut rapprocher les résultats ci-dessous par exemple du résultat que, si* H *est un sous-groupe d'un groupe* G*, alors l'élément unité de* H *est nécessairement celui de* G*.* ◁

PROPOSITION 2.14. (sous-modèle) *Supposons que* $\mathbf{V}$ *est modèle de* ZF *et que* $\mathbf{M}$ *est un sous-modèle transitif de* $\mathbf{V}$*. Alors on a, pour tous* a, b *dans* $\mathbf{M}$ *et tout ordinal* α *dans* $\mathbf{M}$*,*

- $\mathbf{Ord}^{\mathbf{M}} = \mathbf{Ord} \cap \mathbf{M}$, $\quad \emptyset^{\mathbf{M}} = \emptyset$, $\quad \omega^{\mathbf{M}} = \omega$,
- $\{a, b\}^{\mathbf{M}} = \{a, b\}$, $\quad \bigcup^{\mathbf{M}} a = \bigcup a$, $\quad \mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(a) = \mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M}$,
- $V_\alpha^{\mathbf{M}} = V_\alpha \cap \mathbf{M}$, $\quad \mathrm{rang}^{\mathbf{M}}(a) = \mathrm{rang}(a)$, $\quad V_\omega^{\mathbf{M}} = V_\omega$.

DÉMONSTRATION. On se contente d'appliquer les résultats d'absoluité précédemment établis. Ainsi, on a vu dans la proposition 2.12 que la relation « α est un ordinal » est absolue pour toute classe transitive modèle de ZF^-, donc en particulier pour $\mathbf{M}$. Il en résulte que les objets x de $\mathbf{M}$ pour lesquels la structure $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait « x est un ordinal » sont exactement les objets x qui sont dans $\mathbf{M}$ et pour lesquels $(\mathbf{V}, \in)$ satisfait « x est un ordinal », autrement dit les éléments de $\mathbf{Ord} \cap \mathbf{M}$. Pour ce qui est de $\emptyset$, ω, $\{a, b\}$, et $\bigcup a$, le résultat découle directement de la proposition 2.12.

Pour ce qui est de $\mathfrak{P}$, on n'a *pas* montré qu'il s'agit d'une opération absolue, et, *a priori*, on ne sait donc rien pour le moment. Par contre, on a observé que la relation $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$ est absolue (lemme 2.5). Donc, si on a à la fois $x \in \mathbf{M}$ et $x \subseteq a$, on a aussi $x \subseteq^{\mathbf{M}} a$, donc $x \in \mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(a)$, soit $\mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M} \subseteq \mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(a)$. Inversement, si x est dans $\mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(a)$, c'est-à-dire si $(\mathbf{M}, \in)$ satisfait $x \in \mathfrak{P}(a)$, alors, par absoluité de $\subseteq$, on a $x \subseteq a$ dans $\mathbf{V}$, donc $x \in \mathfrak{P}(a)$, d'où on déduit $\mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(a) \subseteq \mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M}$, et, finalement, $\mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(a) = \mathfrak{P}(a) \cap \mathbf{M}$.

On montre la relation $V_\alpha^{\mathbf{M}} = V_\alpha \cap \mathbf{M}$ par une induction sur les ordinaux α qui sont dans $\mathbf{M}$. Pour 0, on a $V_0^{\mathbf{M}} = \emptyset^{\mathbf{M}} = \emptyset = V_0 = V_0 \cap \mathbf{M}$. Pour $\alpha = \beta + 1$, on obtient

$$V_\alpha^{\mathbf{M}} = \mathfrak{P}^{\mathbf{M}}(V_\beta^{\mathbf{M}}) = \mathfrak{P}(V_\beta^{\mathbf{M}}) \cap \mathbf{M} = \mathfrak{P}(V_\beta \cap \mathbf{M}) \cap \mathbf{M} = \mathfrak{P}(V_\beta) \cap \mathbf{M} = V_\alpha \cap \mathbf{M},$$

la seconde égalité résultant de l'hypothèse d'induction, la troisième du résultat ci-dessus sur $\mathfrak{P}^{\mathbf{M}}$, et la quatrième du fait que $x \in \mathbf{M}$ entraîne $x \subseteq \mathbf{M}$. Enfin, pour λ limite, on obtient

$$\begin{aligned} V_\lambda^{\mathbf{M}} &= \bigcup\nolimits^{\mathbf{M}} \{V_\alpha \,;\, \alpha < \lambda\}^{\mathbf{M}} = \bigcup\nolimits^{\mathbf{M}} \{V_\alpha^{\mathbf{M}} \,;\, \alpha < \lambda\} \\ &= \bigcup \{V_\alpha \cap \mathbf{M} \,;\, \alpha < \lambda\} = \bigcup \{V_\alpha \,;\, \alpha < \lambda\} \cap \mathbf{M} = V_\lambda \cap \mathbf{M}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'absoluité de la relation « être une fonction de domaine λ », la troisième de l'hypothèse d'induction, et la quatrième de la distributivité de l'intersection par rapport à l'union.

Pour a dans $\mathbf{M}$, les ordinaux α tels que a appartient à V_α et ceux tels que a appartient à $V_\alpha^{\mathbf{M}}$ sont les mêmes, donc, en particulier, les plus petits tels ordinaux coïncident, d'où l'égalité des rangs calculés dans $\mathbf{V}$ et dans $\mathbf{M}$.

Pour tout entier n de $\mathbf{V}$, on a $V_n^{\mathbf{M}} \subseteq V_n$ et, pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que les ensembles ont le même cardinal. Par construction, le cardinal de V_n est $g(n)$, où g est la fonction définie par récursion $g(0) := 0$ et $g(k) = 2^{g(k-1)}$ pour $k \geqslant 1$. Il s'agit donc de montrer que les évaluations de g dans $\mathbf{V}$ et dans $\mathbf{M}$ coïncident. Soit f l'exponentiation de base 2. Supposons $f^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{V}}$. Alors $g^{\mathbf{M}}$ est une application de ω dans ω, au sens de $\mathbf{M}$ donc au sens de $\mathbf{V}$, qui

[4]Ce n'est pas $\mathbf{M}$, mais $(\mathbf{M}, \in)$, qui est modèle de ZF, mais, par défaut, on s'autorise dans la suite à parler de modèles $\mathbf{M}$ ou $\mathbf{V}$.

prend la valeur 0 en 0 et satisfait en chaque entier la clause de récursion $g(k) = f(g(k-1))$ qui, par hypothèse, est la même que celle satisfaite par $g^{\mathbf{V}}$: par unicité (proposition III.3.2), on déduit $g^{\mathbf{M}} = g^{\mathbf{V}}$. Il suffit d'utiliser le même argument successivement pour passer de la fonction successeur à l'addition, puis de l'addition à la multiplication, et enfin de la multiplication à l'exponentiation pour obtenir l'absoluité de toutes ces fonctions et conclure. □

▷ *L'option de rédaction consistant à se placer dans un modèle de référence est résolument adaptée à la formulation des résultats sur les sous-modèles. Pour un lecteur préférant se rapprocher d'un cadre de structures algébriques standards, on peut sans difficulté reformuler les résultats sans référer à un quelconque modèle distingué. Par exemple, la proposition 2.14 peut être reformulée comme :*

> *Supposons que (M, E) est un modèle de* ZF*, et que (M', E') est un sous-modèle de (M, E) qui est transitif, c'est-à-dire que tout E-prédécesseur d'un élément de M' est dans M'. Alors on a $\mathbf{Ord}^{(M',E')} = \mathbf{Ord}^{(M,E)} \cap M'$, $\emptyset^{(M',E')} = \emptyset^{(M,E)}$, $\omega^{(M',E')} = \omega^{(M,E)}$, et, pour tous a, b dans M', $\{a, b\}^{(M',E')} = \{a, b\}^{(M,E)}$, $\bigcup^{(M',E')} a = \bigcup^{(M,E)} a$, etc.*

Quoique correcte, ce type de formulation semble moins facilement lisible. ◁

La proposition 2.14 sépare les sous-modèles transitifs de $\mathbf{V}$ en deux espèces :

Corollaire 2.15. *(figure 1) Supposons que* $\mathbf{M}$ *est un sous-modèle transitif de* $\mathbf{V}$*. Alors ou bien* $\mathbf{M}$ *contient tous les ordinaux, auquel cas* $\mathbf{M}$ *est une classe propre, ou il existe un plus petit ordinal θ n'appartenant pas à* $\mathbf{M}$*, auquel cas* $\mathbf{M}$ *est un ensemble inclus dans V_θ et on a $\mathbf{Ord}^{\mathbf{M}} = \theta$.*

Démonstration. Si $\mathbf{M}$ contient tous les ordinaux, alors $\mathbf{M}$ est nécessairement une classe propre puisque $\mathbf{Ord}$ est une classe propre (proposition II.2.17). Supposons maintenant que $\mathbf{M}$ ne contient pas tous les ordinaux. Puisque, par hypothèse, $\mathbf{M}$ est une classe définissable de $\mathbf{V}$, il existe un plus petit ordinal θ n'appartenant pas à $\mathbf{M}$. Comme $\mathbf{M}$ est transitive, elle ne peut contenir aucun ordinal plus grand que θ, et la seule possibilité est que $\mathbf{Ord}^{\mathbf{M}}$ soit l'ensemble des ordinaux plus petits que θ, c'est-à-dire par construction θ lui-même. Par ailleurs, tout élément a de $\mathbf{M}$ a, dans $\mathbf{M}$, un rang qui est un ordinal de $\mathbf{M}$, donc, nécessairement, on a $\mathrm{rang}(a) < \theta$, soit $a \in V_\theta$, et, par conséquent, $\mathbf{M}$ est incluse dans V_θ donc, par séparation, c'est un ensemble au sens de $\mathbf{V}$. □

Il est commode de fixer un nom spécifique pour les sous-modèles dont le domaine est une classe propre :

Définition 2.16. (modèle intérieur) On appelle *modèle intérieur* (du modèle de référence $\mathbf{V}$) toute classe transitive $\mathbf{M}$ qui est modèle de ZF et contient tous les ordinaux.

En d'autres termes, un modèle $\mathcal{M}_\bullet$ de ZF est appelé modèle intérieur d'un autre modèle $\mathcal{M}$ de ZF si on a $\mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{M})$, $\in^{\mathcal{M}_\bullet} = \in^{\mathcal{M}}\restriction_{\mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet)}$, $\mathbf{Ord}^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet)$ et que $a \in^{\mathcal{M}_\bullet} b \in \mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet)$ entraîne $a \in \mathrm{Dom}(\mathcal{M}_\bullet)$.

▷ *La proposition 2.14 affirme l'absoluité de certaines notions ensemblistes vis-à-vis des sous-modèles transitifs, mais, bien sûr, l'argument ne s'applique pas à n'importe quelle notion. Un exemple typique est la cardinalité : si* $\mathbf{M}$ *est un sous-modèle transitif de* $\mathbf{V}$*, alors un élément a de* $\mathbf{M}$ *a la même rang dans* $\mathbf{M}$ *et dans* $\mathbf{V}$*, mais il n'a pas nécessairement le même cardinal. En effet, si f est une bijection d'un ordinal κ sur a dans* $\mathbf{M}$*, alors, par la proposition 2.12, f est, dans* $\mathbf{V}$*, une bijection de κ sur a. Mais, inversement, il se peut qu'il existe dans* $\mathbf{V}$ *une bijection d'un ordinal κ sur a qui n'appartienne pas à* $\mathbf{M}$*: une telle bijection est un ensemble*

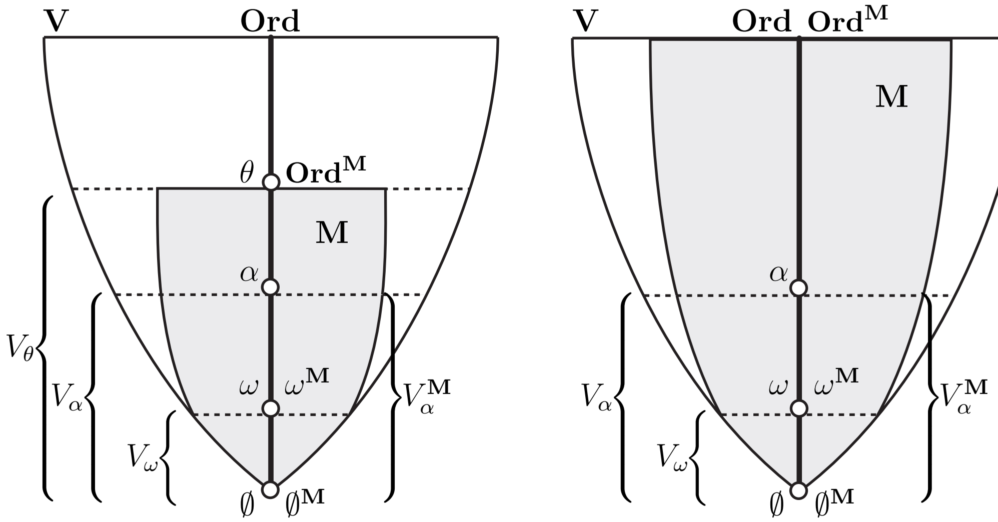

FIGURE 1. Les deux types de sous-modèles transitifs d'un modèle $\mathbf{V}$: ou bien les ordinaux de $\mathbf{M}$ forment un ensemble de $\mathbf{V}$, et alors cet ensemble est un ordinal θ et $\mathbf{M}$ est un ensemble inclus dans V_θ, ou bien $\mathbf{M}$ contient tous les ordinaux de $\mathbf{V}$, et alors $\mathbf{M}$ est une classe propre ; dans tous les cas, V_α évalué dans $\mathbf{M}$ est la trace sur $\mathbf{M}$ de V_α évalué dans $\mathbf{V}$; dans tous les cas, les deux modèles coïncident jusqu'au niveau de V_ω.

de couples (α, x) avec $\alpha < \kappa$ et $x \in a$, donc elle est incluse dans $\mathbf{M}$, mais cela n'entraîne pas que f appartienne à $\mathbf{M}$, c'est-à-dire qu'il existe dans $\mathbf{M}$ un élément dont les éléments soient précisément tous les couples (α, x) du type ci-dessus (cf. figure 2). La seule conclusion qu'on puisse tirer est donc la suivante : $\triangleleft$

PROPOSITION 2.17. (cardinalités) *Supposons que* $\mathbf{V}$ *est modèle de* ZFC *et que* $\mathbf{M}$ *est un sous-modèle transitif de* $\mathbf{V}$ *vérifiant* AC. *Alors, pour tout élément* a *de* $\mathbf{M}$, *on a* $\mathrm{card}(a) \leqslant \mathrm{card}^{\mathbf{M}}(a)$.

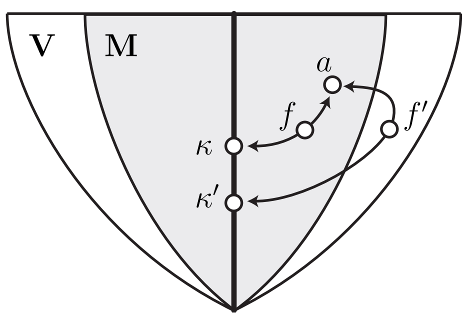

FIGURE 2. Non-absoluité de la cardinalité : toute bijection f entre a et un ordinal κ qui est dans $\mathbf{M}$ est dans $\mathbf{V}$, mais, inversement, il peut exister dans $\mathbf{V} \setminus \mathbf{M}$ une bijection f' de a vers un ordinal κ' plus petit que κ ; une telle bijection est incluse dans $\mathbf{M}$, mais n'est pas élément de $\mathbf{M}$.

2.5. Formules Δ_1^{ZF}.

► On renforce les résultats de la section 2.3 en établissant l'absoluité pour les modèles transitifs de toute notion possédant une définition de complexité Δ_1^{ZF}. Le résultat s'applique en particulier à la propriété d'être un bon ordre. ◄

▷ *On a établi ci-dessus que toute formule Δ_0 est absolue pour les classes transitives, et on en a déduit que toute notion possédant une définition Δ_0^{ZF}, c'est-à-dire équivalente, modulo les axiomes de* ZF*, à une formule dont toutes les quantifications sont bornées, est absolue pour tous les modèles intérieurs. Or, au chapitre VIII, on a observé que des formules plus compliquées que les formules Δ_0 donnent lieu à un phénomène d'absoluité partiel : toute formule Σ_1, dont un exemple typique est constitué par les formules du type $\exists \boldsymbol{x}(\mathsf{F})$ avec* F *de complexité Δ_0, donne lieu à une semi-absoluité ascendante : si une formule Σ_1 est satisfaite dans une structure, elle le reste dans toute extension finale. Par conséquent, toute notion possèdant une définition Σ_1^{ZF} est semi-absolue vers le haut : si elle est satisfaite dans un modèle intérieur, elle est satisfaite dans* $\mathbf{V}$*, sans que l'implication réciproque doive être nécessairement vérifiée. Maintenant, les négations de formules Σ_1 donnent lieu à une semi-absoluité descendante et donc, si une propriété peut être à la fois exprimée par une formule Σ_1^{ZF}* et *par une négation de formule Σ_1^{ZF}, elle est absolue pour les modèles intérieurs.* ◁

Définition 2.18. (formules Σ_1, Π_1 et Δ_1) (*i*) Une formule de $\mathcal{L}_{\text{ens}}$ est dite *de complexité* Σ_1 (*resp.* Π_1) si les seules quantifications universelles (*resp.* existentielles) y figurant sont des quantifications bornées $\forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{y}$ (*resp.* $\exists \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{y}$) et que, dans l'arbre la représentant, il n'y a aucun symbole $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ au-dessus d'un quantificateur $\exists$ (*resp.* $\forall$).

(*ii*) Si T est une famille de formules de $\mathcal{L}_{\text{ens}^+}$, une formule F de $\mathcal{L}_{\text{ens}^+}$ est dite de complexité Σ_1^{T} (*resp.* Π_1^{T}) s'il existe au moins une formule F' de complexité Σ_1 (*resp.* Π_1) telle que T prouve $\mathsf{F}{\Leftrightarrow}\mathsf{F}'$.

(*iii*) Une formule est dite *de complexité* Δ_1^{T} si elle est à la fois Σ_1^{T} et Π_1^{T}.

▷ *De façon équivalente, la famille des formules Σ_1 est la plus petite famille contenant toutes les formules sans quantificateur et close par conjonction, disjonction, quantification existentielle bornée, et quantification universelle. De même, la famille des formules Π_1 est la plus petite contenant toutes les formules sans quantificateur et close par conjonction, disjonction, quantification existentielle bornée, et quantification universelle. En particulier, si* G *est une formule Δ_0, alors $\exists \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{\mathsf{k}}(\mathsf{G})$ est une formule Σ_1, et $\forall \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{\mathsf{k}}(\mathsf{G})$ est une formule Π_1.*

On peut définir les formules Δ_1 comme celles qui sont à la fois Σ_1 et Π_1, mais, alors, on n'obtient guère que les formules Δ_0, et de même pour les formules $\Delta_1^{\emptyset}$. La notion ne devient intéressante que dans le contexte d'une théorie T *suffisamment riche pour démontrer des équivalences non triviales, typiquement* ZF. ◁

Lemme 2.19. (*i*) *Toute formule Π_1 équivaut à la négation d'une formule Σ_1, et toute formule Σ_1 équivaut à la négation d'une formule Π_1.*

(*ii*) *Soient* $\mathbf{M}$ *une classe transitive, et $\vec{a}$ des éléments de* $\mathbf{M}$*. Si $\mathsf{F}(\vec{x})$ est une formule de complexité Σ_1, alors $\mathbf{M} \models \mathsf{F}(\vec{a})$ entraîne $\mathbf{V} \models \mathsf{F}(\vec{a})$; symétriquement, si $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})$ est de complexité Π_1, alors $\mathbf{V} \models \mathsf{F}(\vec{a})$ entraîne $\mathbf{M} \models \mathsf{F}(\vec{a})$* [5].

(*iii*) *Si* T *est une famille de formules de $\mathcal{L}_{\text{ens}^+}$ satisfaites dans $(\mathbf{V}, \in)$, toute formule Δ_1^{T} est absolue pour toute classe transitive modèle de* T.

[5] on parle de *semi-absoluité ascendante* et *descendante*, respectivement

Démonstration. Le point (i) résulte immédiatement de la définition et des règles de négation pour les quantifications.

Pour (ii), l'argument pour les formules Σ_1 est celui du lemme VIII.3.10. Formellement, on peut utiliser une induction sur le nombre k de quantifications existentielles non bornées, et, pour un nombre k donné, sur la longueur de la formule. Pour $\mathsf{k} = 0$, on a une formule Δ_0, et on applique le lemme 2.10. Supposons $\mathsf{k} \geqslant 1$. Si F est de la forme $\mathsf{G}{\wedge}\mathsf{H}$ ou$\mathsf{G}{\vee}\mathsf{H}$, ou $\forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{y}(\mathsf{G})$, l'induction est immédiate. Le cas *a priori* non trivial est celui où $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})$ est $\exists \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{y}(\mathsf{G}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}))$, avec G contenant $\mathsf{k}-1$ quantifications existentielles non bornées. Supposons $\mathbf{M} \models \exists \boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\vec{a}, \boldsymbol{x}))$. Il existe donc b dans $\mathbf{M}$ tel que $\mathbf{M}$ satisfait $\mathsf{G}(\vec{a}, b)$. Par hypothèse de récurrence, $\mathbf{V}$ satisfait aussi $\mathsf{G}(\vec{a}, b)$, donc, *a fortiori*, $\mathbf{V}$ satisfait $\exists \boldsymbol{x}(\mathsf{G}(\vec{a}, \boldsymbol{x}))$, c'est-à-dire $\mathsf{F}(\vec{a})$.

Le résultat pour les formules Π_1 se déduit de celui pour les formules Σ_1 grâce à (i) : supposons que $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})$ est Π_1, que $\mathbf{M}$ est une classe transitive, et que $\vec{a}$ sont des éléments de $\mathbf{M}$ tels que $\mathbf{V}$ satisfait $\mathsf{F}(\vec{a})$. D'après (i), il existe une formule G de complexité Σ_1 telle que $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}})$ est équivalente à $\mathsf{G}(\vec{\boldsymbol{x}})$. L'hypothèse que $\mathbf{V}$ satisfait $\mathsf{F}(\vec{a})$ entraîne que $\mathbf{V}$ ne satisfait pas $\mathsf{G}(\vec{a})$, ce qui entraîne que $\mathbf{M}$ ne satisfait pas $\mathsf{G}(\vec{a})$ car cela contredirait la semi-absoluité ascendante des formules Σ_1, et donc finalement que $\mathbf{M}$ satisfait $\mathsf{F}(\vec{a})$.

(iii) Supposons que T prouve $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}) \Leftrightarrow \mathsf{F}'(\vec{\boldsymbol{x}})$ et $\mathsf{F}(\vec{\boldsymbol{x}}) \Leftrightarrow \mathsf{F}''(\vec{\boldsymbol{x}})$, où $\mathsf{F}'(\vec{\boldsymbol{x}})$ est Σ_1 et $\mathsf{F}''(\vec{\boldsymbol{x}})$ est Π_1. Soit $\mathbf{M}$ une classe transitive qui est modèle de T, et $\vec{a}$ des éléments de $\mathbf{M}$. Supposons $\mathbf{M} \models \mathsf{F}(\vec{a})$. Alors, puisque $\mathbf{M}$ est modèle de T, donc satisfait $\mathsf{F}(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathsf{F}'(\vec{a})$, on a aussi $\mathbf{M} \models \mathsf{F}'(\vec{a})$, et, comme $\mathsf{F}'(\vec{\boldsymbol{x}})$ est une formule Σ_1, on déduit $\mathbf{V} \models \mathsf{F}'(\vec{a})$ par (ii), d'où $\mathbf{V} \models \mathsf{F}(\vec{a})$ puisque $\mathbf{V}$ est modèle de T donc satisfait $\mathsf{F}(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathsf{F}'(\vec{a})$. Inversement, supposons $\mathbf{V} \models \mathsf{F}(\vec{a})$. Alors, puisque $\mathbf{V}$ est modèle de T, donc satisfait $\mathsf{F}(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathsf{F}''(\vec{a})$, on a aussi $\mathbf{V} \models \mathsf{F}''(\vec{a})$. Puisque $\mathsf{F}''(\vec{\boldsymbol{x}})$ est une formule Π_1, on déduit de (ii) que $\mathbf{M}$ satisfait $\mathsf{F}''(\vec{a})$, puis $\mathsf{F}(\vec{a})$ puisque d'où $\mathbf{M}$ est modèle de T, donc satisfait $\mathsf{F}(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathsf{F}''(\vec{a})$. □

L'exemple suivant est alors fondamental :

Lemme 2.20. (bon ordre absolu) *La relation « $\prec$ est un bon ordre sur $\boldsymbol{A}$ » est semi-absolue vers le bas pour toute classe transitive qui est modèle de Z^-, et absolue pour toute classe transitive qui est modèle de* ZF.

Démonstration. On commence par observer le caractère $\Delta_0^{\mathsf{ZF}^-}$, donc absolu pour toute classe transitive qui est modèle de ZF^-, donc *a fortiori* pour toute classe transitive qui est modèle de ZF, d'un certain nombre de formules mettant en jeu un ordre. D'abord, en présence des axiomes de ZF^-, « $\prec$ est un ordre total sur $\boldsymbol{A}$ » est exprimé par

$$\text{« }\prec\text{ est une relation binaire sur }\boldsymbol{A}\text{ »} \wedge \forall \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{A}(\neg \boldsymbol{x}{\prec}\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}{\in}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}{\prec}\boldsymbol{y}{\prec}\boldsymbol{z}{\Rightarrow}\boldsymbol{x}{\prec}\boldsymbol{z}),$$

qui est une formule Δ_0. Enfin, « $\prec$ est un ordre total sur $\boldsymbol{A}$ et $<$ est un ordre total sur $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{f}$ est un isomorphisme entre $(\boldsymbol{A}, \prec)$ et $(\boldsymbol{B}, <)$ » est exprimé par

$$\begin{aligned}
&\text{« }\prec\text{ est un ordre total sur }\boldsymbol{A}\text{ »}\\
&\quad \wedge \text{« }<\text{ est un ordre total sur }\boldsymbol{B}\text{ »}\\
&\quad \wedge \text{« }\boldsymbol{f}\text{ est une bijection de }\boldsymbol{A}\text{ sur }\boldsymbol{B}\text{ »}\\
&\quad \wedge \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{A}\ \forall \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'{\in}\boldsymbol{B}\ ((\boldsymbol{x}{\prec}\boldsymbol{y} \wedge (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in \boldsymbol{f} \wedge (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') \in \boldsymbol{f}) \Rightarrow \boldsymbol{x}'{<}\boldsymbol{y}'),
\end{aligned}$$

encore Δ_0. Alors, « $\prec$ est un bon ordre sur A » s'exprime par

$$\text{« }\prec\text{ est un ordre total sur }\boldsymbol{A}\text{ »} \wedge \forall \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \exists \boldsymbol{x}{\in}\boldsymbol{X}\ \forall \boldsymbol{y}{\in}\boldsymbol{X}\ (\neg(\boldsymbol{y}{\prec}\boldsymbol{x}))),$$

qui est une formule typiquement Π_1 à cause de la quantification universelle non bornée $\forall \boldsymbol{X}$. On en déduit le résultat de semi-absoluité descendante pour les classes transitives dans lesquelles toutes les formules ci-dessus font sens, donc toutes celles qui sont modèles de Z^-.

Maintenant, dans le contexte de ZF, un ensemble ordonné $(A, \prec)$ est bien ordonné si et seulement si $\prec$ est un ordre total et il existe un ordinal α et un isomorphisme f de $(A, \prec)$ sur $(\alpha, \in)$, ce qui s'exprime par la formule Σ_1

$$\text{« } \boldsymbol{\prec} \text{ est un ordre total sur } \boldsymbol{A} \text{ »}$$
$$\wedge\ \exists \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{f} (\text{« } \boldsymbol{\alpha} \text{ est un ordinal »} \wedge \text{« } \boldsymbol{f} \text{ est un isomorphisme de } (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\prec}) \text{ sur } (\boldsymbol{\alpha}, \in)).$$

Par conséquent, on a trouvé deux formules $\mathsf{F}', \mathsf{F}''$ respectivement de complexité Π_1 et Σ_1 telle que ZF prouve que « $\prec$ est un bon ordre sur A » équivaut à la fois à F' et à F''. C'est dire que cette formule est Δ_1^{ZF}, et donc, par le lemme 2.19, elle est absolue pour toutes les classes transitives qui sont modèles de ZF. □

3. Quelques résultats d'indépendance

► On applique les techniques de la section précédente à l'étude des structures $(V_\lambda, \in)$, et on en déduit plusieurs résultats d'indépendance relative des axiomes de ZF, en particulier le fait que l'axiome de l'infini ne résulte pas des autres axiomes de Z, et celui que les axiomes de remplacement ne résultent pas des axiomes de Z. ◄

3.1. Les structures $(V_\lambda, \in)$.

► On montre que, dès que λ est un ordinal limite, la structure $(V_\lambda, \in)$ est un modèle de Z. ◄

Proposition 3.1. (V_λ) *(i) La structure $(V_\omega, \in)$ est modèle de* $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}} + \neg\mathsf{Inf}$.
(ii) Pour tout ordinal limite $\lambda > \omega$, la structure $(V_\lambda, \in)$ est modèle de Z.
(iii) Si AC *est satisfait dans* $\mathbf{V}$, *il l'est aussi dans $(V_\lambda, \in)$ pour λ limite.*
(iv) La structure $(V_{\omega+\omega}, \in)$ n'est pas modèle de ZF.

Démonstration. Soit λ un ordinal limite quelconque. On applique le lemme 2.2 à la structure $(V_\lambda, \in)$, ce qui est légitime puisque V_λ est un ensemble (donc une classe) transitif. D'après le lemme 2.2(i), les axiomes d'extensionnalité et d'union sont satisfaits dans $(V_\lambda, \in)$. Ensuite, si a et b sont dans V_λ, il en est de même de $\{a, b\}$, $\bigcup a$, et de $\mathfrak{P}(a)$, puisque λ est limite, donc, en vertu du lemme 2.2(ii), les axiomes de la paire, de l'union, et des parties sont satisfaits dans $(V_\lambda, \in)$. Puis, pour tout a dans V_λ, l'ensemble $\mathfrak{P}(a)$ est inclus dans (et même élément de) V_λ, donc, par le lemme 2.2(iii), les axiomes de séparation sont satisfaits dans $(V_\lambda, \in)$. Par conséquent, $(V_\lambda, \in)$ est modèle de $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$.

Ensuite, d'après le corollaire 2.13, $(V_\lambda, \in)$ satisfait l'axiome de l'infini si et seulement si ω est dans V_λ : donc la propriété est fausse pour $\lambda = \omega$, et vraie pour $\lambda > \omega$.

Enfin, on a vu dans la proposition 2.3 que $(V_\omega, \in)$ satisfait les axiomes de remplacement, et l'argument s'étend à tout V_λ avec λ limite. Ceci achève la démonstration de (i) et (ii).

(iii) Pour l'axiome du choix, soit a quelconque de V_λ. Puisque λ est limite, il existe $\alpha < \lambda$ tel que a est dans V_α. Puisque AC est vrai dans $\mathbf{V}$, il existe un bon ordre $\prec$ sur a. Par construction, $\prec$ est inclus dans $a \times a$, donc dans $V_{\alpha+3}$, et, par conséquent, il appartient à V_λ. Par hypothèse, $\mathbf{V}$ satisfait la formule « $\prec$ est un bon ordre sur A ». Par le lemme 2.20, il en résulte que $(V_\lambda, \in)$ satisfait la même formule, puisque celle-ci est semi-absolue vers le bas pour les classes transitives qui sont modèles de Z^-, ce qui est le cas de V_λ. Donc $(V_\lambda, \in)$ satisfait que a est bien ordonnable, et donc satisfait AC.

(iv) Considérons maintenant le cas particulier de $V_{\omega+\omega}$. Soit $\mathsf{F}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha})$ la formule $\exists \boldsymbol{f} (\mathsf{G}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{f}))$, où $\mathsf{G}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{f})$ est

$$\boldsymbol{n} \in \omega \wedge \mathbf{Ord}(\boldsymbol{\alpha}) \wedge \text{« } \boldsymbol{f} \text{ est un isomorphisme entre } \omega + \boldsymbol{n} \text{ et } \boldsymbol{\alpha} \text{ »}:$$

On a vu dans la démonstration du lemme 2.20 que $\mathsf{G}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{f})$ est absolue pour toute classe transitive modèle de Z^-, donc en particulier pour $V_{\omega+\omega}$. Dans $\mathbf{V}$, la formule $\mathsf{F}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha})$ est fonctionnelle en $\boldsymbol{\alpha}$: pour chaque entier $\boldsymbol{n}$ il existe au plus un ordinal α tel que $\mathbf{V}$ satisfasse $\mathsf{F}(n, \alpha)$. Donc $\mathbf{V}$ satisfait la formule Π_1

$$\forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}((\mathsf{F}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}) \wedge \mathsf{F}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\beta})) \Rightarrow \alpha = \beta),$$

et il en est donc de même de $V_{\omega+\omega}$ par semi-absoluité descendante. Or $\mathbf{V}$ satisfait $\mathsf{F}(n, \omega{+}n)$ pour chaque entier n, donc, par absoluité de $\mathsf{G}(\boldsymbol{n}, \alpha, f)$, il en est de même de $(V_{\omega+\omega}, \in)$. Alors, si $V_{\omega+\omega}$ satisfaisait l'axiome de remplacement associé à la formule F, il devrait exister un élément a de $V_{\omega+\omega}$ contenant tous les ordinaux α tels que $(V_{\omega+\omega}, \in)$ satisfait $\mathsf{F}(n, \alpha)$ pour au moins un élément n de ω, c'est-à-dire tous les ordinaux $\omega{+}n$ avec n entier. Un tel ensemble a inclurait donc $\omega + \omega$, contredisant le paradoxe de Burali–Forti puisque $(V_{\omega+\omega}, \in)$ est un modèle de Z et $\omega + \omega$ est, dans ce modèle, la classe de tous les ordinaux. Donc $(V_{\omega+\omega}, \in)$ est un modèle de Z, mais pas de ZF. □

▷ *Les résultats précédents ne sont acquis que sous l'hypothèse que la structure ambiante* $(\mathbf{V}, \in)$ *est elle-même modèle de* ZF*, suivant la convention 2.1. On rappelle qu'il s'agit là d'une convention de rédaction n'entachant les résultats d'aucun flou. Ce qu'affirme la proposition 3.1 peut être énoncé comme*

> *Supposons que* $\mathcal{M}$ *est un modèle de* ZF*. Alors la structure* $(V_\lambda, \in)^{\mathcal{M}}$ *est un modèle de* Z*, etc.*

qui ne suppose aucune hypothèse particulière quant au cadre métamathématique. ◁

3.2. Résultats de non-prouvabilité.

▶ Grâce au théorème de complétude, les résultats précédents permettent de démontrer que les axiomes de $\mathsf{ZFC_{fini}}$ ne prouvent pas l'axiome de l'infini, et que les axiomes de Z ne prouvent pas les axiomes de remplacement. ◀

PROPOSITION 3.2. (axiome de l'infini 1) (PA) *Si le système* $\mathsf{ZFC_{fini}}$ *est consistant, il ne prouve pas l'axiome de l'infini.*

DÉMONSTRATION. Supposons que le système $\mathsf{ZFC_{fini}}$ prouve l'axiome de l'infini Inf. Alors tout modèle (éventuel) de $\mathsf{ZFC_{fini}}$ est modèle de ZF. Supposons $\mathsf{ZFC_{fini}}$ consistant. Alors, par le théorème de complétude, il possède un modèle $\mathcal{M}$, qui est donc modèle de ZF. Mais alors, par la proposition 3.1(i), la structure $(V_\omega, \in)^{\mathcal{M}}$ est un modèle de $\mathsf{ZFC_{fini}}$ qui ne satisfait pas Inf, ce qui contredit l'hypothèse. C'est donc que $\mathsf{ZFC_{fini}}$ soit ne prouve pas Inf, soit est contradictoire.

Tel qu'exposée ci-dessus, la démonstration est sémantique et, à ce titre, elle requiert un cadre métamathématique de théorie des ensembles. En fait, on peut affaiblir ce cadre et obtenir le même résultat dans un cadre aussi faible que système de Peano. L'argument est le suivant. La démonstration de la proposition 3.1(i) montre que, pour chaque axiome F de $\mathsf{ZFC_{fini}}$, il existe une preuve (purement syntaxique) à partir de ZFC de l'énoncé relativisé $\mathsf{F}^{(V_\omega, \in)}$, c'est-à-dire de F où chaque quantification est restreinte à V_ω. La transformation serait pénible, mais elle est possible car à aucun endroit on n'utilise l'hypothèse qu'il existe un modèle de ZFC, mais simplement le fait que les axiomes de ZFC sont satisfaits dans $\mathbf{V}$. De la même façon, on obtiendrait une preuve formelle de l'énoncé $\neg\mathsf{Inf}^{(V_\omega, \in)}$ à partir de ZFC.

Or supposons que $\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_\mathsf{n}$ est une preuve de Inf à partir de $\mathsf{ZFC_{fini}}$. Alors chacune des formules relativisées $\mathsf{F}_1^{(V_\omega, \in)}, \ldots, \mathsf{F}_\mathsf{n}^{(V_\omega, \in)}$ est prouvable à partir de ZFC. En effet, si F_i est un axiome de $\mathsf{ZFC_{fini}}$, c'est le cas comme on l'a dit plus haut. Si F_i s'obtient par coupure à partir de F_j et F_k, il en est de même pour $\mathsf{F}_\mathsf{i}^{(V_\omega, \in)}$ à partir de $\mathsf{F}_\mathsf{j}^{(V_\omega, \in)}$ et $\mathsf{F}_\mathsf{k}^{(V_\omega, \in)}$. Supposons enfin que $\mathsf{F_i}$ s'obtient par généralisation à partir de $\mathsf{F_j}$, à savoir que $\mathsf{F_i}$ est $\forall \boldsymbol{x}(\mathsf{F_j})$. Alors, par hypothèse de récurrence, ZFC prouve $\mathsf{F_j}^{(V_\omega,\in)}$. Ensuite $\mathsf{F_j}^{(V_\omega,\in)} \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in V_\omega \Rightarrow \mathsf{F_j}^{(V_\omega,\in)})$ est un axiome logique, donc, par coupure, ZFC prouve $\boldsymbol{x} \in V_\omega \Rightarrow \mathsf{F_j}^{(V_\omega,\in)}$, d'où, par généralisation, $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \in V_\omega \Rightarrow \mathsf{F_j}^{(V_\omega,\in)})$, qui est $\mathsf{F_i}^{(V_\omega,\in)}$.

On déduit que ZFC prouve $\mathsf{F_n}^{(V_\omega,\in)}$, qui est $\mathsf{Inf}^{(V_\omega,\in)}$. D'autre part, on a vu que ZF prouve $\neg\mathsf{Inf}^{(V_\omega,\in)}$. Donc, sous les hypothèses considérées, c'est-à-dire s'il existe une preuve de Inf à partir de $\mathsf{ZFC_{fini}}$, on a établi que ZFC n'est pas consistant puisqu'il prouve à la fois $\mathsf{Inf}^{(V_\omega,\in)}$ et $\neg\mathsf{Inf}^{(V_\omega,\in)}$. □

On peut montrer un résultat plus fort, à savoir que non seulement $\mathsf{ZFC_{fini}}$ ne prouve pas Inf, mais même qu'il n'en prouve pas la consistance au sens précis ci-dessous.

Proposition 3.3. (axiome de l'infini 2) *La consistance de* $\mathsf{ZFC_{fini}}$ *n'entraîne pas celle de* ZFC.

Démonstration. On rappelle (définition VIII.4.17) que, si T est un ensemble de formules, $\mathrm{Cons}_{\mathsf{T}}$ est la formule d'arithmétique qui code le fait que T est consistante, c'est-à-dire qu'on ne peut pas démontrer à partir de T à la fois une formule et sa négation. Si ZFC n'est pas consistant, alors la formule $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC_{fini}}}$ est prouvable à partir de ZFC, comme l'est toute formule. Supposons ZFC consistant. En formalisant dans ZFC la démonstration de la proposition 3.1(i), on obtient que ZFC prouve, pour chaque axiome F de $\mathsf{ZFC_{fini}}$, la formule relativisée $\mathsf{F}^{(V_\omega,\in)}$, et même, la démonstration étant uniforme, la formule « $(V_\omega,\in)$ est modèle de $\mathsf{ZFC_{fini}}$ »[6]. Par conséquent, ZFC prouve « il existe un modèle de $\mathsf{ZFC_{fini}}$ », et, de là, par la partie facile du théorème de complétude (cohérence), ZFC prouve la formule $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC_{fini}}}$.

Supposons alors que la consistance de $\mathsf{ZFC_{fini}}$ implique celle de ZFC. En recopiant la démonstration sur les numéros de formule, on obtient une preuve de $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC_{fini}}} \Rightarrow \mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC}}$. En enchaînant avec ce qui précède, on déduit que ZFC implique $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC}}$, ce qui contredit le second théorème d'incomplétude de Gödel (proposition VIII.4.19). □

▷ *Le résultat de la proposition 3.3 est plus fort que celui de la proposition 3.2 : affirmer que* T *prouve* F *signifie que tout modèle de* T *est modèle de* F*, alors qu'affirmer que la consistance de* T *entraîne celle de* $\mathsf{T}\cup\{\mathsf{F}\}$ *signifie simplement que, parmi tous les modèles de* T*, au moins un est modèle de* F.

Comme l'axiome du choix n'est pas utilisé dans la vérification du résultat que $(V_\omega,\in)$ *est modèle de* $\mathsf{ZF_{fini}}$*, le même argument montre que* $\mathsf{ZF_{fini}}$ *ne prouve pas* Inf*, et que la consistance de* $\mathsf{ZF_{fini}}$ *n'entraîne pas celle de* ZF*. De même, comme les axiomes de remplacement ne sont pas utilisés pour montrer que* $(V_\omega,\in)$ *est modèle de* $\mathsf{Z_{fini}}$*, on obtient que* $\mathsf{Z_{fini}}$ *ne prouve pas* Inf*, et que la consistance de* $\mathsf{Z_{fini}}$ *n'entraîne pas celle de* Z. ◁

Appliquant *mutatis mutandis* le même traitement à la structure $(V_{\omega+\omega},\in)$ qui est modèle de Z mais pas de ZF, on obtient[7] :

Proposition 3.4. (axiomes de remplacement) (i) *Si le système* Z *est consistant, il ne prouve pas les axiomes de remplacement.*

(ii) *La consistance de* Z *n'entraîne pas celle de* ZF.

[6]ce qui est une conclusion *a priori* plus forte car, ZFC étant une théorie infinie et $\mathcal{M}$ n'étant pas nécessairement un modèle standard, la version de ZFC selon $\mathcal{M}$ n'est pas nécessairement la même que la version métamathématique, *cf.* chapitre X

[7]ici dans la version sans AC ; une version analogue avec ZC et ZFC est établie de même

DÉMONSTRATION. La démonstration de la proposition 3.1 montre que, dans chaque modèle $\mathcal{M}$ de ZF, il existe un objet de ce modèle, à savoir le couple $(V_{\omega+\omega}, \in\restriction_{V_{\omega+\omega}})^{\mathcal{M}}$, qui est un modèle de la théorie Z. Donc, dans $\mathcal{M}$, la formule $\mathrm{Cons}_{\mathsf{Z}}$ est satisfaite. Comme ceci est vrai pour tout modèle $\mathcal{M}$ de ZF, on déduit du théorème de complétude que ZF prouve $\mathrm{Cons}_{\mathsf{Z}}$. Si $\mathrm{Cons}_{\mathsf{Z}}$ entraînait $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZF}}$, on déduirait que ZF prouve $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZF}}$, ce qu'interdit le théorème de Gödel. □

▷ *Les résultats précédents montrent donc que l'axiome de l'infini, puis les axiomes de remplacement, sont de véritables extensions des systèmes antérieurs. On traduit souvent le résultat que la consistance d'un système* T *n'implique pas celle d'une de ses extensions* T+A *en disant que la force logique du système* T+A *est strictement plus grande que celle de* T*. Ainsi, ici, on pourra dire que la force logique de* ZF *est strictement plus grande que celle de* Z*, laquelle est à son tour strictement plus grande que celle de* $\mathsf{Z}_{\mathsf{fini}}$. ◁

3.3. Consistance de l'axiome de fondation.

▶ A la différence des cas précédents, on montre que l'adjonction de l'axiome de fondation ne renforce pas strictement le système ZF. ◀

▷ *La méthode de la section 3.2 n'est pas seulement utile pour démontrer des résultats négatifs, et on peut l'utiliser, le cas échéant, pour des résultats d'équiconsistance. Dans le cas de l'axiome de fondation, on a déjà noté que son adjonction ne correspond pas à l'introduction d'un principe d'existence d'ensemble supplémentaire, mais simplement à l'option de restreindre l'étude des ensembles aux ensembles purs. Il n'est donc pas étonnant qu'il ne modifie pas la force logique de la théorie.* ◁

On rappelle que $\mathsf{ZF}_\bullet$ désigne ZF privé de l'axiome de fondation AF.

PROPOSITION 3.5. (axiome de fondation) *Si* $\mathsf{ZF}_\bullet$ *est consistant, il en est de même de* ZF.

DÉMONSTRATION. Supposons $\mathsf{ZF}_\bullet$ consistant. Alors, par le théorème de complétude, il existe un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathsf{ZF}_\bullet$. Soit $\mathcal{M}_\bullet$ le sous-modèle de $\mathcal{M}$ dont le domaine est formé par les éléments a tels que $\mathcal{M}$ vérifie « a est un ensemble pur », et l'appartenance est la restriction de celle de $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{M}_\bullet$ est un modèle de ZF. En effet, on vérifie que, dans la démonstration du lemme 2.2, on n'utilise pas l'hypothèse que $\mathbf{V}$ satisfait l'axiome de fondation, sauf pour affirmer que $\mathbf{M}$ le satisfait à son tour. Introduisant la notation $\mathbf{U}$ pour la classe de tous les ensembles — de sorte qu'on a ici $\mathbf{U}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Dom}(\mathcal{M})$ — on applique le lemme 2.2 à la sous-classe $\mathbf{V}$ de $\mathbf{U}$ pour conclure que $\mathbf{V}$ est modèle de $\mathsf{ZF}_\bullet$. Enfin, par la proposition III.4.3, la classe $\mathbf{V}$ satisfait l'axiome de fondation, donc est modèle de ZF. Donc ZF est consistant, puisqu'il a un modèle. Par conséquent, à partir de l'hypothèse que $\mathsf{ZF}_\bullet$ est consistant, on a montré que ZF l'est. □

3.4. Cardinaux inaccessibles.

▶ On introduit la notion de cardinal inaccessible, et on montre que, si κ est un cardinal inaccessible, alors $(V_\kappa, \in)$ est modèle de ZFC : ce sont ceux qui sont des cardinaux (fortement) inaccessibles. ◀

▷ *Existe-il des ordinaux α tels que la structure $(V_\alpha, \in)$ soit modèle de* ZFC*? Il est facile de voir que, si α est successeur, alors $(V_\alpha, \in)$ n'est pas modèle du système de Zermelo* Z*, donc a fortiori non plus de* ZFC*. Par contre, d'après la proposition 3.1, toutes les structures du type $(V_\lambda, \in)$ avec λ ordinal limite plus grand que ω sont modèles de* Z*, et donc la question est de déterminer pour quels ordinaux limites λ la structure $(V_\lambda, \in)$ satisfait les axiomes de remplacement.*

L'argument de la proposition 3.1(iii) montrant que $(V_{\omega+\omega}, \in)$ n'est pas modèle de ZF *s'étend à de nombreux ordinaux limites λ. Cependant, prenant la question à rebourd, il est assez facile d'imaginer une condition suffisante, à savoir que λ soit un cardinal inaccessible, défini comme* *cardinal ne pouvant être atteint à partir des cardinaux le précédant ni par l'opération d'ensemble des parties, ni par celle de passage à la limite d'une suite.* ◁

Définition 3.6. (fortement limite, inaccessible) Un cardinal κ est appelé *fortement limite* si, pour tout $\alpha < \kappa$, on a $\mathrm{card}(\mathfrak{P}(\alpha)) < \kappa$. Un cardinal κ est appelé *inaccessible*[8] si on a $\kappa > \aleph_0$ et que κ est à la fois régulier et fortement limite.

Exemple 3.7. (fortement limite) Il est facile d'exhiber des cardinaux fortement limites. Par exemple, sur le modèle des $\aleph$, on peut construire une suite croissante de cardinaux $\beth_\alpha$ (« beth indice α ») en posant $\beth_0 := \omega$, puis $\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}$, et $\beth_\lambda := \sup\{\beth_\alpha\,;\, \alpha < \lambda\}$ pour λ limite. Une induction immédiate montre que, si l'hypothèse généralisée du continu est satisfaite, on a simplement $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$ pour tout α. Dans tous les cas, le cardinal $\beth_\lambda$ est fortement limite dès que λ est un ordinal limite : par exemple, $\beth_\omega$ est fortement limite. Par contre $\beth_\omega$, et, plus généralement, tout cardinal $\beth_\lambda$ vérifiant $\lambda < \beth_\lambda$, n'est pas inaccessible, puisque l'application $\alpha \mapsto \beth_\alpha$ fournit une application cofinale de λ dans $\beth_\lambda$. Tout cardinal fortement limite est limite (le vérifier), et, par conséquent, tout cardinal inaccessible apporte une réponse positive à la question V.3.12, puisqu'il est à la fois limite et régulier.

Proposition 3.8. (modèle de ZFC) *Si* $\mathbf{V}$ *est modèle de* ZFC *et si* κ *est un cardinal inaccessible, alors* $(V_\kappa, \in)$ *est modèle de* ZFC.

Démonstration. Comme κ est un cardinal, donc un ordinal limite plus grand que ω, on sait par la proposition 3.1(i) que $(V_\kappa, \in)$ est modèle de Z+AC, et il ne reste qu'à considérer les axiomes de remplacement. Avec les notations du lemme 2.2(iv), supposons que $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{z}})$ est une formule ensembliste et que $a, \vec{c}$ sont des éléments de V_κ tels que $(V_\kappa, \in)$ satisfait $\forall \boldsymbol{x}{\in}a\, \exists! \boldsymbol{y}\, (\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c}))$, c'est-à-dire tels que $\mathbf{V}$ satisfait $\forall \boldsymbol{x}{\in}a\, \exists! \boldsymbol{y}\, (\mathsf{F}^{V_\kappa}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c}))$. Alors F^{V_κ} définit dans $\mathbf{V}$ une fonction f dont le domaine est a, et qui est incluse dans V_κ par construction. Si on montre que f appartient à V_κ, alors $(V_\kappa, \in)$ satisfait que f est un ensemble avec les propriétés requises pour témoigner de l'axiome de remplacement associé à F.

Or, puisque a est dans V_κ, il est dans un certain V_α avec $\alpha < \kappa$, et on a donc $\mathrm{card}(a) \leqslant \mathrm{card}(V_\alpha) \leqslant \beth_\alpha < \kappa$. Pour chaque x dans a, on a $\mathrm{rang}(f(x)) < \kappa$, d'où, comme κ est régulier et qu'on a $\mathrm{card}(a) < \kappa$,

$$\sup\{\mathrm{rang}(f(x))\,;\, x{\in}a\} < \kappa.$$

C'est dire qu'il existe $\beta < \kappa$ tel que $f(x)$ est dans V_β pour tout x dans a. Mais alors, f appartient à $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(V_\alpha \times V_\beta))$, donc il existe $\gamma < \kappa$ tel que f est dans V_γ, et donc *a fortiori* dans V_κ. Par conséquent, les axiomes de remplacement sont satisfaits dans $(V_\kappa, \in)$, et $(V_\kappa, \in)$ est un modèle de ZFC. □

Comme plus haut, on déduit :

Corollaire 3.9. *Notons* ∃CI *la formule « il existe un cardinal inaccessible ». Alors, s'il est consistant, le système* ZFC *ne prouve pas* ∃CI, *et la consistance de* ZFC *n'entraîne pas celle de* ZFC+∃CI.

[8] on précise parfois en « fortement inaccessible »

Démonstration. Si λ est un ordinal limite, alors toute fonction de V_λ dans V_λ est incluse dans V_λ, donc est élément de $V_{\lambda+1}$. Donc la propriété « λ est régulier » est absolue pour toute classe incluant $V_{\lambda+1}$, et de même pour « λ est un cardinal inaccessible ». Pour montrer que ZFC n'entraîne pas $\exists$CI, il suffit de montre l'existence d'un modèle de ZFC+$\neg\exists$CI. Or plaçons-nous dans un modèle $\mathbf{V}$ de ZFC. Si $\mathbf{V}$ ne contient pas de cardinal inaccessible, on a fini. Sinon, « être un cardinal inaccessible » étant une propriété ensembliste, il existe un plus petit cardinal inaccessible κ. Par la proposition 3.8, $(V_\kappa, \in)$ est un modèle de ZFC. Supposons que $(V_\kappa, \in) \models$ « λ est inaccessible ». Alors, par absoluité, $(\mathbf{V}, \in) \models$ « λ est inaccessible », contredisant la minimalité de κ. Donc $(V_\kappa, \in)$ est un modèle de ZFC ne contenant pas de cardinal inaccessible.

Supposons que, dans le cadre de ZFC, on peut montrer que la consistance de ZFC entraîne celle de ZFC+$\exists$CI (par une démonstration formalisable au premier ordre). On a donc

$$\mathsf{ZFC} \vdash \mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC}} \Rightarrow \mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC}+\exists\mathsf{CI}}.$$

Or on vient de voir que ZFC+$\exists$CI prouve $\mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC}}$ [9], et donc on déduit

$$\mathsf{ZFC}+\exists\mathsf{CI} \vdash \mathrm{Cons}_{\mathsf{ZFC}+\exists\mathsf{CI}},$$

ce qui contredit le théorème de Gödel appliqué au système ZFC+$\exists$CI. □

$\triangleright$ *On peut s'interroger sur le bénéfice d'introduire la notion de cardinal inaccessible, puisque ni l'existence d'un tel cardinal, ni même la consistance de cette existence ne peuvent être établies à partir du système* ZFC. *On y reviendra au chapitre* **??** *: pour le moment, notons seulement que la situation de l'axiome « il existe un cardinal inaccessible » par rapport à* ZF *est exactement la même que celle de l'axiome de l'infini « il existe un cardinal infini » par rapport au système* $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}}$.

Comme dernière remarque, on peut observer que le critère suffisant de la proposition 3.8 est presque nécessaire, mais pas tout à fait : si $(V_\kappa, \in)$ est modèle de ZFC, *alors, par la proposition 3.1, on sait que κ doit être un ordinal limite plus grand que ω. Ensuite, pour $\alpha < \kappa$, on a $\alpha \in V_\kappa$, d'où $\mathfrak{P}(\alpha) \in V_\kappa$; comme on suppose $(V_\kappa, \in)$ modèle de* ZFC, *il doit exister dans V_κ une bijection f entre $\mathfrak{P}(\alpha)$ et un cardinal μ, et, comme f est aussi une bijection entre $\mathfrak{P}(\alpha)$ et μ dans $\mathbf{V}$, la seule possibilité est qu'on ait $\mu = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\alpha)) = 2^{\mathrm{card}(\alpha)}$, donc $2^{\mathrm{card}(\alpha)} < \kappa$. Il en résulte que κ est un cardinal, puisque, sinon, on obtiendrait une injection de $2^{\mathrm{card}}(\kappa)$ dans κ, et qu'il est fortement limite. Le problème reste de montrer que κ est régulier. Or, supposons que $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ est une suite d'ordinaux inférieure à κ. Si cette suite est définissable dans V_κ, c'est-à-dire s'il existe une formule $\mathsf{F}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \vec{\boldsymbol{x}})$ et des éléments $\vec{a}$ de V_κ tels que $\alpha = \alpha_\gamma$ équivaut à $\mathsf{F}(\gamma, \alpha, \vec{a})$, alors l'application dans $(V_\kappa, \in)$ de l'axiome de remplacement associé à* F *montre qu'il doit exister dans V_κ un ensemble contenant l'image de θ par la classe fonctionnelle* F, *et donc donne $\sup_{\gamma<\theta} \alpha_\gamma < \kappa$. Un exemple typique de cette situation est la suite $(\omega + n)_{n\in\omega}$ utilisée dans la démonstration de la proposition 3.1(iii) pour montrer que $(V_{\omega+\omega}, \in)$ ne satisfait pas l'axiome de remplacement : ici la formule* F *est*

$$\boldsymbol{n} \in \omega \wedge \mathbf{Ord}(\boldsymbol{\alpha}) \wedge \exists \boldsymbol{f}(\text{« } \boldsymbol{f} \text{ est un isomorphisme entre } \omega + \boldsymbol{n} \text{ et } \boldsymbol{\alpha} \text{ »}),$$

dont le seul paramètre est ω, un élément de $V_{\omega+\omega}$. Le problème pour conclure en général est qu'un cardinal κ peut être singulier sans qu'il existe de suite définissable en témoignant, au moins n'utilisant que des paramètres appartenant à V_κ.

Par contre, si on appelle définissablement singulier un ordinal λ tel qu'il existe une suite d'ordinaux $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ cofinale sous λ de longueur plus petite que λ et définissable dans V_λ, et ***définissablement inaccessible*** *un cardinal fortement limite qui n'est pas définissablement singulier, alors l'argument précédent montre que, si $(V_\kappa, \in)$ est modèle de* ZFC, *alors κ doit être définissablement inaccessible. Inversement, si κ est définissablement inacessible, $(V_\kappa, \in)$ est modèle de* ZFC. *En effet, la question est de vérifier les axiomes de remplacement. Considérant $\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{\boldsymbol{z}})$ et supposant que a et $\vec{c}$ sont dans V_κ et qu'on a $\forall \boldsymbol{x}{\in}a\, \exists! \boldsymbol{y}\, (\mathsf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \vec{c}))$, on peut d'abord fixer une bijection f d'un ordinal θ sur a, puis considérer la formule $\mathsf{G}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \vec{c}, \theta, f)$*

[9] avec la même réserve que dans la note **??**

$\boldsymbol{\gamma} < \theta \wedge \exists \boldsymbol{y}(\mathsf{F}(f(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{y}, \vec{c}) \wedge \boldsymbol{\alpha} = \mathrm{rang}(\boldsymbol{y}))$.

La formule G *est fonctionnelle en* $\boldsymbol{\alpha}$*, et elle définit une suite* $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\theta}$ *d'ordinaux plus petits que* κ*. Soit* $\alpha = \sup_{\gamma<\theta} \alpha_\gamma$*. L'hypothèse que* κ *n'est pas définissablement singulier implique* $\alpha < \kappa$*. Alors, par construction, l'image de* a *par la classe fonctionnelle* F *est incluse dans* V_α*, donc appartient à* V_κ*.*

On obtient ainsi une caractérisation complète des ordinaux κ *tels que* $(V_\kappa, \in)$ *soit modèle de* ZFC*. L'intérêt de la notion de cardinal définissablement inaccessible est cependant faible, car le théorème de non-définissabilité de la vérité (proposition VIII.4.2) entraîne qu'elle n'est pas une propriété ensembliste.* ◁

4. Réduction au cas des modèles transitifs

▶ On étend la méthode des définitions récursives à toute relation bien fondée, et on démontre le théorème de Mostowski, qui permet de ramener l'étude de modèles $(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ très généraux à celle de modèles de la forme $(\mathbf{M}, \in)$ où $\mathbf{M}$ est une classe transitive. ◀

▷ *Dans la section 2, on a établi des critères pour reconnaître et étudier des modèles particuliers de* ZF*, à savoir les modèles dits transitifs du type* $(\mathbf{M}, \in)$ *avec* $\mathbf{M}$ *classe transitive. On va voir ici que les modèles transitifs ne sont pas si particuliers que cela, dans la mesure où de nombreux modèles sont isomorphes à des modèles transitifs. Plus précisément, on va montrer que tout modèle* $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ *tel que la relation* $\mathbf{R}$ *soit bien fondée est isomorphe à un modèle transitif. Ce résultat technique est très important en pratique, car il permet de se concentrer dans la suite sur les modèles transitifs sans réelle perte de généralité.*

La question générale étudiée ici est donc la suivante — on rappelle qu'on écrit $(\mathbf{M}, \in)$ *pour* $(\mathbf{M}, \in\restriction_{\mathbf{M}})$ *:* ◁

Question 4.1. *Etant donnée une classe relationnelle* $\mathbf{R}$ *sur une classe* $\mathbf{C}$*, existe-t-il une classe transitive* $\mathbf{M}$ *telle que* $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ *soit isomorphe à* $(\mathbf{M}, \in)$ *?*

4.1. Trois conditions nécessaires.

▶ La réponse à la question 4.1 ne peut pas être toujours positive. On établit ici trois conditions nécessaires faciles. ◀

Dans toute la suite, on adopte un vocabulaire de classe ; tout ce qu'on dira vaut en particulier lorsque les classes concernées sont des ensembles. On parlera de *classe relationnelle* (binaire) pour une classe dont les éléments sont des couples. Si $\mathbf{R}$ est une classe relationnelle, on note $x \;\mathbf{R}\; y$ pour $(x, y) \in \mathbf{R}$.

Définition 4.2. (prédécesseurs, petite, extensionnelle) Supposons que $\mathbf{R}$ une classe relationnelle sur une classe $\mathbf{C}$. Pour x, y dans $\mathbf{C}$, on dit que y est un $\mathbf{R}$-*prédécesseur* de x si $y \;\mathbf{R}\; x$ est vérifié ; on note $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x)$ la classe de tous les $\mathbf{R}$-prédécesseurs de x. On dit que $\mathbf{R}$ est *petite* si, pour tout x dans $\mathbf{C}$, la classe $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x)$ est un ensemble; on dit que $\mathbf{R}$ est *extensionnelle* si $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ satisfait l'axiome d'extensionnalité, c'est-à-dire si $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x) = \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(y)$ entraîne $x = y$.

Par ailleurs, on étend aux classes la notion de relation bien fondée en déclarant qu'une classe relationnelle $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{C}$ est *bien fondée* si tout sous-ensemble non vide X de $\mathbf{C}$ possède un élément $\mathbf{R}$-minimal, c'est-à-dire qu'il existe m dans X tel que $x \;\mathbf{R}\; m$ est faux pour tout x dans X.

EXEMPLE 4.3. (petite, extensionnelle) La relation d'appartenance $\in$ sur $\mathbf{V}$ est petite, car, pour tout ensemble x, la classe $\mathrm{Pred}_{\in}(x)$, c'est-à-dire $\{y\,;\, y{\in}x\}$, coïncide avec x, donc est un ensemble. Elle est extensionnelle, car si deux ensembles ont les mêmes éléments, ils sont égaux en vertu de l'axiome d'extensionnalité. Noter que, si $\mathbf{M}$ est une classe quelconque, alors $\in\restriction_{\mathbf{M}}$ n'est pas nécessairement extensionnelle, car $a \cap \mathbf{M} = a' \cap \mathbf{M}$ n'entraîne pas $a = a'$ en général.

LEMME 4.4. *Supposons que* $\mathbf{R}$ *est une classe relationnelle sur* $\mathbf{C}$*, et qu'il existe une classe transitive* $\mathbf{M}$ *et une classe fonctionnelle* $\mathbf{F}$ *établissant un isomorphisme entre* $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ *et* $(\mathbf{M}, \in)$*. Alors* $\mathbf{R}$ *est petite, extensionnelle, et bien fondée.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathbf{M}$ est une classe transitive. Par définition, $x \in \mathbf{M}$ entraîne $x \subseteq \mathbf{M}$, et on a donc $\mathrm{Pred}_{\in\restriction_{\mathbf{M}}}(x) = x$ pour tout x dans $\mathbf{M}$. Il en résulte que $\in\restriction_{\mathbf{M}}$ est petite et extensionnelle (ainsi qu'on l'a déjà noté dans le lemme 2.2(i)). Enfin, $\in\restriction_{\mathbf{M}}$ est bien fondée, car, si Y est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{M}$, alors, par l'axiome de fondation, il existe dans Y un élément m de rang minimal, et alors $y{\in}m$ est faux pour tout y dans Y.

Supposons que $\mathbf{F}$ établit un isomorphisme entre $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ et $(\mathbf{M}, \in)$. Alors, pour tous x, y dans $\mathbf{C}$, la relation $y \mathrel{\mathbf{R}} x$ équivaut à $\mathbf{F}(y) \in \mathbf{F}(x)$, et on déduit $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(x))$. Par remplacement, on déduit que $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x)$ est un ensemble, donc que $\mathbf{R}$ est petite. Par ailleurs, supposons qu'on a $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x) = \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(y)$. Par le calcul ci-dessus, on déduit $\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(y)$, puis, $\mathbf{F}$ étant injective, $x = y$, et $\mathbf{R}$ est extensionnelle. Enfin, soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbf{C}$. Alors, par remplacement, l'image de X par $\mathbf{F}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{M}$, donc elle possède un élément $\in$-minimal m, dont l'image par $\mathbf{F}^{-1}$ est un élément $\mathbf{R}$-minimal de X. Donc $\mathbf{R}$ est bien fondée. □

▷ *Ainsi donc, on ne peut espérer une réponse positive à la question 4.1 que si la relation* $\mathbf{R}$ *considérée est petite et extensionnelle. On va montrer plus loin que ces conditions nécessaires sont également suffisantes.* ◁

4.2. Récursion sur une relation bien fondée.

▶ On étend le schéma de définition par récursion sur les ordinaux de la section III.3 en un schéma similaire valable pour toute relation bien fondée. ◀

DÉFINITION 4.5. (clos) Soit R une relation binaire sur un ensemble X (ordre ou non). On dit qu'une partie Y de X est *R-close* si tout R-prédécesseur d'un élément de Y est dans Y.

Dans le cas d'une relation R non transitive, les ensembles $\mathrm{Pred}_R(x)$ ne sont pas nécessairement R-clos, mais il existe une notion de clôture simple.

LEMME 4.6. *Soit* R *une relation binaire sur* X*. Alors il existe une application* Pred^*_R *de* X *dans* $\mathfrak{P}(X)$ *telle que, pour tout* x *dans* X*,* $\mathrm{Pred}^*_R(x)$ *soit le plus petit ensemble* R*-clos contenant* x *et, de plus, on a*

$$\mathrm{Pred}^*_R(x) = \{x\} \cup \bigcup_{yRx} \mathrm{Pred}^*_R(y). \tag{4.1}$$

Démonstration. On définit par récursion sur ω une suite de fonctions P_n de X dans $\mathfrak{P}(X)$ dans lui-même en posant $P_0(x) := \{x\}$, puis en définissant P_{n+1} par $P_{n+1}(x) := \bigcup_{yRx} P_n(y)$. On pose alors $\mathrm{Pred}^*_R(x) := \bigcup_{n<\omega} P_n(x)$. Une induction sur n montre que toute partie R-close de X contenant x inclut $P_n(x)$ pour tout n, donc $\mathrm{Pred}^*_R(x)$. Inversement, $\mathrm{Pred}^*_R(x)$ est R-clos par construction. Enfin (4.1) résulte de la construction inductive de $\mathrm{Pred}^*_R(x)$. □

Proposition 4.7. (récursion sur une relation bien fondée) *Supposons que R est une relation bien fondée sur un ensemble X. Alors, pour tout ensemble A et toute application F de $X \times \mathrm{Fonc}(X, A)$ dans A, il existe une unique application G de X dans A vérifiant, pour tout x dans X,*

$$G(x) = F(x, G\restriction_{\mathrm{Pred}_R(x)}). \tag{4.2}$$

Démonstration. L'argument est le même que pour la proposition III.3.4, les ordinaux étant remplacés par les parties R-closes. On dit qu'une fonction g de X dans A est une *solution en x* si x et tous ses prédécesseurs sont dans $\mathrm{Dom}(g)$ et si on a l'égalité $g(x) = F(x, g\restriction_{\mathrm{Pred}_R(x)})$, c'est-à-dire si la clause de récursion souhaitée est satisfaite au point x. On appelle *solution* toute fonction de X dans A qui est une solution en tout point x de son domaine. Noter que, si g est une solution, $\mathrm{Dom}(g)$ est R-clos puisque, si x est dans $\mathrm{Dom}(g)$, l'hypothèse que g est une solution en x entraîne que tous les prédécesseurs de x sont aussi dans $\mathrm{Dom}(g)$. Par séparation, il existe un ensemble S de toutes les solutions, puisqu'on peut écrire

$$S = \{g{\in}\mathrm{Fonc}(X, A)\,;\, \forall \boldsymbol{x}{\in}\mathrm{Dom}(g)(\forall \boldsymbol{y}{\in}X(yRx{\Rightarrow}y{\in}\mathrm{Dom}(g) \wedge g(x) = F(x, g\restriction_{\mathrm{Pred}_R(x)})\}.$$

On va montrer par induction sur y que, pour tout y,
(i) il existe une unique solution g_y de domaine $\mathrm{Pred}^*_R(y)$, et
(ii) pour tout x dans $\mathrm{Pred}^*_R(y)$ et toute solution g telle que $g(x)$ existe, on a $g(x) = g_y(x)$.

Soit donc y un élément quelconque de X. On note S_y l'ensemble des solutions dont le domaine est de la forme $\mathrm{Pred}^*_R(z)$ avec z prédécesseur de y. L'existence de S_y est garantie par séparation dans S puisqu'on a

$$S_y := \{g{\in}S\,;\, \exists zRy(\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Pred}^*_R(z))\}.$$

Par hypothèse d'induction, il existe pour chaque prédécesseur z de y une unique solution g_z de domaine $\mathrm{Pred}^*_R(z)$. Soit h_y l'union de S_y, c'est-à-dire l'ensemble de tous les couples $(x, g(x))$ pour g dans S_y et x dans $\mathrm{Dom}(g)$. Supposons que (x, t) et (x, t') sont dans h_y. Par définition, il existe deux prédécesseurs z, z' de y et deux solutions g, g' de domaines respectifs $\mathrm{Pred}^*_R(z)$ et $\mathrm{Pred}^*_R(z')$ tels qu'on ait $t = g(x)$ et $t' = g'(x)$. Alors l'hypothèse d'induction pour z appliquée aux solutions g et g' donne $t = g(x) = g_z(x)$ et $t' = g'(x) = g_z(x)$, d'où $t = t'$, et donc h_y est une fonction. En outre, en chaque point x de $\mathrm{Dom}(h_y)$, il existe un prédécesseur z de y tel que x appartienne à $\mathrm{Pred}^*_R(z)$, et, par construction, on a $h_y\restriction_{\mathrm{Pred}^*_R(z)} = g_z\restriction_{\mathrm{Pred}^*_R(z)}$. Donc h_y est solution en x puisque g_z l'est, et, par conséquent, h_y est une solution de domaine $\bigcup_{zRy} \mathrm{Pred}^*_R(z)$.

Eu égard à l'égalité (4.1), le seul point manquant dans le domaine de h_y pour qu'il soit une solution de domaine $\mathrm{Pred}^*_R(y)$ est y lui-même [10]. On pose

$$g_y := h_y \cup \{(y, F(y, h_y\restriction_{\mathrm{Pred}_R(y)}))\}.$$

Alors g_y est une fonction de domaine $\mathrm{Pred}^*_R(y)$. De plus, si x est dans $\mathrm{Dom}(g_y)$, ou bien x est dans $\mathrm{Dom}(h_y)$, et on sait que h_y, donc g_y, est solution en x, ou bien x est le point y lui-même, et alors la valeur de $g_y(y)$ a été précisément choisie pour assurer que g_y soit solution en y. Par conséquent, g_y est une solution de domaine $\mathrm{Pred}^*_R(y)$ et l'existence est démontrée dans le point (i).

[10] Comme R est bien fondée, on ne peut avoir ni $y\ R\ y$, ni même $y \in \mathrm{Pred}^*_R(y)$.

Pour (ii), soient x un point quelconque de $\mathrm{Pred}^*_R(y)$, et g une solution quelconque dont le domaine contient x. On veut montrer qu'on a $g(x) = g_y(x)$. En vertu de (4.1), on sépare deux cas. Supposons d'abord qu'il existe un prédécesseur z de y tel que x est dans $\mathrm{Pred}^*_R(z)$. Appliquant l'hypothèse d'induction en z aux solutions g et g_y, on trouve $g(x) = g_z(x) = g_y(x)$. Supposons maintenant $x = y$. Pour tout prédécesseur z de y, et toujours en appliquant l'hypothèse d'induction en z aux solutions g et g_y, on trouve $g(z) = g_y(z)$, d'où l'égalité $g{\restriction}_{\mathrm{Pred}_R(y)} = g_y{\restriction}_{\mathrm{Pred}_R(y)}$. Alors, comme g et g_y sont des solutions en y, on obtient

$$g(y) = F(y, g{\restriction}_{\mathrm{Pred}_R(y)}) = F(y, g_y{\restriction}_{\mathrm{Pred}_R(y)}) = g_y(y),$$

soit $g(x) = g_y(x)$ comme annoncé. Donc le point (ii) est démontré.

Appliquant le résultat précédent à une solution de domaine $\mathrm{Pred}^*_R(y)$, on conclut à l'unicité de la solution g_y, ce qui achève la démonstration de (i) et complète l'induction.

On définit alors $G : X \to A$ par $G(x) = g_x(x)$. Par construction, G est une solution partout définie sur X. D'autre part, si G' est une solution partout définie quelconque, le point (ii) donne $G'(y) = g_y(y) = G(y)$ pour tout y, d'où $G' = G$. □

L'extension des ensembles aux classes est facile.

Proposition 4.8. (récursion généralisée) *Supposons que* $\mathbf{R}$ *est une classe relationnelle bien fondée sur une classe* $\mathbf{C}$. *Alors, pour toute classe* $\mathbf{A}$ *et toute classe fonctionnelle* $\mathbf{F}$ *dont le domaine inclut* $\mathbf{C} \times \mathrm{Fonc}(\mathbf{C}, \mathbf{A})$, *il existe une unique classe fonctionnelle* $\mathbf{G}$ *définie sur* $\mathbf{C}$ *et à valeurs dans* $\mathbf{A}$ *vérifiant, pour tout* x *dans* $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}{\restriction}_{\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x))}). \tag{4.3}$$

Démonstration. La construction est la même que pour la proposition 4.7. L'hypothèse que les classes $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x)$ sont des ensembles est nécessaire pour garantir que $\mathbf{G}{\restriction}_{\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x)}$ soit un ensemble, et donc que la condition (4.3) ait un sens. □

Une conséquence directe est l'existence d'une application rang pour toute classe relationnelle bien fondée.

Corollaire 4.9. *Supposons que* $\mathbf{R}$ *est une classe relationnelle bien fondée sur une classe* $\mathbf{C}$. *Alors il existe une classe fonctionnelle* $\rho_{\mathbf{R}}$ *définie sur* $\mathbf{C}$ *et à valeurs dans les ordinaux et vérifiant, pour tout* x *dans* $\mathbf{C}$,

$$\rho_{\mathbf{R}}(x) = \sup\{\rho_{\mathbf{R}}(y)\,;\, y\,\mathbf{R}\,x\} + 1.$$

Exemple 4.10. (rang) Appliquant ce qui précède à la relation $\in$ sur la classe $\mathbf{V}$, on obtient le rang tel que défini au chapitre III.

4.3. Le théorème de Mostowski.

▶ On établit une réponse complète à la question 4.1 en montrant que les conditions nécessaires du lemme 4.4 sont aussi suffisantes. ◀

Proposition 4.11. (théorème de Mostowski) *Supposons que* $\mathbf{R}$ *est une classe relationnelle petite et bien fondée sur* $\mathbf{C}$ *dont les segments initiaux sont des ensembles. Alors il existe une unique classe transitive* $\mathbf{M}$ *et une unique classe fonctionnelle surjective* $\mathbf{F}$ *de* $\mathbf{C}$ *sur* $\mathbf{M}$ *vérifiant, pour tous* x, y *dans* $\mathbf{C}$,

$$x\,\mathbf{R}\,y \Leftrightarrow \mathbf{F}(x) \in \mathbf{F}(y). \tag{4.4}$$

Si, de plus, $\mathbf{R}$ *est extensionnelle, alors* $\mathbf{F}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Par la proposition 4.8, il existe une unique classe fonctionnelle $\mathbf{F}$ définie récursivement par

$$\mathbf{F}(x) := \{\, \mathbf{F}(y) \,;\, y \;\mathbf{R}\; x \,\}.$$

Soit $\mathbf{M}$ l'image de $\mathbf{F}$. Par construction, $\mathbf{F}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ sur $(\mathbf{M}, \in)$. Par construction également, tout élément de $\mathbf{M}$ est de la forme $\mathbf{F}(x)$ avec x dans $\mathbf{A}$, et donc tout élément de $\mathbf{F}(x)$ est de la forme $\mathbf{F}(y)$ avec y dans $\mathbf{A}$, donc est lui-même dans $\mathbf{M}$. Donc $\mathbf{M}$ est une classe transitive.

Supposons que $\mathbf{F}'$ est un homomorphisme de $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ sur une classe transitive $(\mathbf{M}', \in\restriction_{\mathbf{M}'})$. L'hypothèse que $\mathbf{M}'$ est l'image de $\mathbf{F}'$ et est transitive entraîne qu'on a $\mathbf{F}'(x) = \{\mathbf{F}'(y) \,;\, y \;\mathbf{R}\; x\}$ pour tout x dans $\mathbf{C}$. L'unicité de la définition par récursion garantit $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, donc $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$.

Supposons $\mathbf{F}$ non injective. Il existe donc a dans $\mathbf{M}$ ayant au moins deux antécédents par $\mathbf{F}$. Fixons un tel a ayant, de surcroît, un rang minimal. Soient x, x' deux antécédents distincts de a par $\mathbf{F}$. Supposons $y \;\mathbf{R}\; x$. On a alors $\mathbf{F}(y) \in \mathbf{F}(x) = a = \mathbf{F}(x')$, donc, par construction, il doit exister y' vérifiant $y' \;\mathbf{R}\; x'$ tel qu'on ait $\mathbf{F}(y') = \mathbf{F}(y) \in a$, et, par le choix de a, ceci entraîne $y' = y$. On a donc $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x) \subseteq \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x')$. L'argument symétrique donne $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x') \subseteq \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x)$, et, finalement, on obtient $\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x) = \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(x')$, ce qui montre que $\mathbf{R}$ n'est pas extensionnelle. □

Appelons *extensionnelle* une classe $\mathbf{C}$ telle que la relation $\in\restriction_{\mathbf{C}}$ soit extensionnelle, c'est-à-dire telle que $(\mathbf{C}, \in)$ satisfasse l'axiome d'extensionnalité.

Corollaire 4.12. *Pour toute classe extensionnelle $\mathbf{C}$, il existe une unique classe transitive $\mathbf{M}$ et un unique isomorphisme de $(\mathbf{C}, \in\restriction_{\mathbf{C}})$ sur $(\mathbf{M}, \in)$. En particulier, pour tout ensemble extensionnel X, il existe un unique ensemble transitif M et un unique isomorphisme de $(X, \in\restriction_X)$ sur $(M, \in\restriction_M)$.*

Démonstration. La relation $\in\restriction_{\mathbf{C}}$ est petite et bien fondée. On applique le théorème de Mostowski. □

▷ *Pour une classe relationnelle quelconque $\mathbf{R}$ sur une classe $\mathbf{C}$, la propriété que $\mathbf{R}$ est extensionnelle signifie, par définition, que $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ satisfait l'axiome d'extensionnalité. Par contre, la propriété que $\mathbf{R}$ est bien fondée n'est pas, en général, synonyme de ce que $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ satisfasse l'axiome de fondation. Pour illustrer la différence, supposons que l'axiome des choix dépendants* ACD *est vérifié dans $\mathbf{V}$, et que, d'autre part, $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ est un modèle de* ZF−AF+ACD. *Alors, $\mathbf{R}$ est bien fondée si et seulement si, dans $\mathbf{V}$, il n'existe aucune suite infinie décroissante pour $\mathbf{R}$. D'un autre côté, $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ satisfait* AF *si et seulement si, dans $\mathbf{C}$, il n'existe aucune suite strictement décroissante pour $\mathbf{R}$. La distinction est la suivante : il se peut qu'il existe dans $\mathbf{V}$ une suite $(x_0, x_1, x_2 ...)$ d'éléments de $\mathbf{C}$ vérifiant $...x_2 \;\mathbf{R}\; x_1 \;\mathbf{R}\; x_0$, mais que cette suite ne soit pas visible depuis l'intérieur de $\mathbf{C}$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas dans $\mathbf{C}$ un élément a dont les $\mathbf{R}$-prédécesseurs soient exactement les x_i. Autrement dit, rien ne garantit que $\mathbf{C}$ soit clos par formation de suite infinie, c'est-à-dire encore rien ne garantit qu'on a $\mathbf{C}^\omega \subseteq \mathbf{C}$. Dans ces conditions, $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ peut très bien satisfaire l'axiome de fondation, c'est-à-dire croire que $\mathbf{R}$ est bien fondée, alors que, de l'extérieur, $\mathbf{V}$ voit que $\mathbf{R}$ est mal fondée.* ◁

Exercices

Exercice 1. (Ackermann) Calculer $\bigcup 17$, $\mathfrak{P}(17)$, et $S(17)$ au sens du modèle d'Ackermann $(\mathbb{N}, E)$.

Exercice 2. (Ackermann, variante) On fixe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, et on définit une relation binaire $\in_f$ sur $\mathbb{N}$ par $x \in_f y \Leftrightarrow x \in f(y)$. Montrer que $(\mathbb{N}, \in_f)$ est un modèle de $\mathsf{ZF}_{\mathsf{fini}}$. Calculer les valeurs de $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ dans ce modèle. Montrer que l'axiome de l'infini n'y est pas satisfait.

Exercice 3. ($V_{\alpha+1}$) Montrer qu'une structure de la forme $(V_{\alpha+1}, \in)$ n'est jamais modèle de Z. [L'ordinal α n'y a pas de successeur.]

Exercice 4. (inaccessible) Montrer que ZFC ne prouve pas l'existence d'un cardinal inaccessible en utilisant le second théorème d'incomplétude.

Exercice 5. (bien fondé) Montrer que, si $\mathbf{R}$ est une classe relationnelle petite et bien fondée sur $\mathbf{C}$, alors toute sous-classe non vide $\mathbf{X}$ de $\mathbf{C}$ possède un élément $\mathbf{R}$-minimal. [Montrer d'abord que la clôture transitive de $\mathbf{R}$ est petite et bien fondée.]