Université Claude Bernard Lyon I 2nd semestre 2008/2009
Master 1 Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Feuille 1 : quelques corrections.

III.*Puissances ordinales.* On a défini en cours l'opération sur les ordinaux $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^\beta$ de la façon suivante :
- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{\lambda+1} = \alpha^\lambda.\alpha$
- Si λ est limite, $\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \lambda\}$

1) Pourquoi cette définition est-elle légale ?
2) Montrer que si α et β sont dénombrables alors α^β est aussi dénombrable. [1]
3) Prouver que pour tout triplet d'ordinaux α, β, γ on a $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta.\alpha^\gamma$.
4) Prouver qu'il existe un ordinal dénombrable ξ tel que $\xi = \omega^\xi$. Existe-t-il un ordinal tel que $\xi = \xi^\omega$?

Correction.
1) C'est une définition par récurrence transfinie, justifiée par un théorème du cours.
2) Etant donnée la définition de α^β, on va utiliser un raisonnement par récurrence transfinie.
Fixons donc α dénombrable, et supposons que β est un ordinal dénombrable tel que pour tout $\gamma < \beta$, α^γ soit dénombrable. Alors si $\beta = 0$ il n'y a rien à prouver ; si $\beta = \gamma + 1$ alors $\alpha^\beta = \alpha^\gamma.\alpha$ par définition, et comme le produit de deux ordinaux dénombrables est un ordinal dénombrable l'hypothèse de récurrence entraîne que α^β est dénombrable.
Reste à traiter le cas limite : alors on a

$$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$$

Par conséquent α^β est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, et est donc dénombrable *si on s'autorise à utiliser l'axiome du choix dénombrable.* Sinon on ne peut pas répondre à cette question.
3) On fixe α et β, et on raisonne par récurrence transfinie sur γ, dont on peut supposer qu'il est > 0. Fixons donc un ordinal $\gamma > 0$ tel que pour tout $\delta < \gamma$ on ait $\alpha^{\beta+\delta} = \alpha^\beta.\alpha^\delta$.
Si γ est successeur, alors $\gamma = \delta + 1$ pour un certain ordinal δ ; par définition et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+(\delta+1)} = \alpha^{(\beta+\delta)+1} = \alpha^{\beta+\delta}.\alpha = (\alpha^\beta.\alpha^\delta).\alpha = \alpha^\beta.(\alpha^\delta.\alpha) = \alpha^\beta.\alpha^{\delta+1} = \alpha^\beta.\alpha^\gamma \ .$$

(Dans la cinquième égalité ci-dessus, on a utilisé l'associativité de la multiplication ordinale).
Reste à traiter le cas où γ est limite ; alors notons que par définition de l'addition et de la multiplication on a

$$\beta + \gamma = \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\} \text{ et } \alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\delta : \delta < \gamma\} \ .$$

Par définition de l'exponentiation, on a alors

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\}$$

L'hypothèse de récurrence et la définition de l'exponentiation donnent :

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \sup\{\alpha^\beta.\alpha^\delta : \delta < \gamma\}$$

La définition de la multiplication entraîne finalement :

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta.\alpha^\gamma \ .$$

4) Définissons par récurrence une suite ξ_n en posant $\xi_0 = 1$, $\xi_{n+1} = \omega^{\xi_n}$. Cette suite est strictement croissante ; appelons ξ sa borne supérieure. C'est un ordinal dénombrable puisque c'est la réunion d'une famille

[1] en particulier, α^β ne correspond PAS à l'ensemble des fonctions de β dans α : ça, c'est le produit de *cardinaux.*

dénombrable d'ordinaux dénombrables.
Comme $\xi = \sup\{\xi_n \colon n < \omega\}$, on a par définition

$$\omega^{\xi} = \sup\{\omega^{\xi_n} \colon n < \omega\} = \sup\{\xi_{n+1} \colon n < \omega\} = \omega^{\xi} \ .$$

On a par définition $1 = 1^{\omega}$; par contre, si $\xi > 1$ alors ξ est un segment initial strict de ξ^{ω}, et on ne peut donc pas avoir $\xi = \xi^{\omega}$.

VI. *Une autre définition de la somme ordinale.*
Soit I un ensemble ordonné par une relation d'ordre $<_I$, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ordonnés ; on note $<_{\alpha_i}$ la relation d'ordre sur α_i.
On définit l'union disjointe $\sqcup_{i\in I}\alpha_i$ de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par $\sqcup\alpha_i = \cup_{i\in I}\alpha_i \times \{i\}$. Puis on munit cet ensemble de l'ordre lexicographique : $(a,i) < (b,j)$ si et seulement si $\big(i <_I j$ ou $i = j$ et $a <_{\alpha_i} b\big)$.
1) Montrer que cela définit bien une relation d'ordre sur $\sqcup_{i\in I}\alpha_i$.
2) Montrer que si $<_I$ est un bon ordre, ainsi que tous les ordres $<_{\alpha_i}$, alors l'ordre construit est également un bon ordre.
Dans le cas où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille d'ordinaux, et où I est un ordinal, on appelle *somme ordinale* de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$, et on note $\sum_{i\in I}\alpha_i$, l'unique ordinal isomorphe au bon ordre ainsi construit. Si $I = 2$, on le note $\alpha_0 + \alpha_1$.
3)Montrer que l'addition ordinale est associative, non commutative, que 0 est élément neutre et que, pour tout ordinal α, $\alpha + 1$ est l'ordinal successeur $\alpha \cup \{\alpha\}$ de α.
4) Montrer la monotonie à droite, i.e $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$
En déduire la régularité à gauche, i.e $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$.
Enfin, montrer que la somme ordinale n'est pas monotone à gauche (au sens strict) ni régulière à droite, mais qu'on a : $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.
5) Montrer que la somme est la seule opération binaire sur les ordinaux vérifiant :
$\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$ (s est la fonction successeur) ;
$\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$ si β est un ordinal limite.
Pouvez-vous proposer une définition du produit d'ordinaux similaire à celle de cet exercice ?

Correction.
1) Il est clair que $<$ est irréflexive.
Montrons que $<$ est antisymétrique : si $(a,i) < (b,j)$ alors soit $i <_I j$, auquel cas on ne peut pas avoir $j <_I i$, et donc on n'a pas non plus $(b,j) < (a,i)$; soit $i = j$ et $a <_{\alpha_i} b$, auquel cas on ne peut avoir $b <_{\alpha_i} a$ et donc pas non plus $(b,j) < (a,i)$.
Pour voir que $<$ est transitive, choisissons $(a,i), (b,j)$ et (c,k) tels que $(a,i) < (b,j) < (c,k)$. Si $i \leq_I j <_I k$ la transitivité de $<_I$ montre que $(a,i) < (c,k)$; de même si $i <_I j \leq_I k$. Il ne reste plus qu'à considérer le cas $i = j = k$, auquel cas on utilise la transitivité de $<_{\alpha_i}$ pour conclure que $(a,i) < (c,k)$.
2) Fixons une partie non vide $M \subseteq \sqcup_{i\in I}\alpha_i$. On introduit

$$i_0 = \min\{i \in I \colon \exists a\ (a,i) \in M\} \ .$$

Le min est bien sûr pris pour l'ordre $<_I$; il existe puisque I est bien ordonné. Maintenant, considérons

$$M_{i_0} = \{a \in \alpha_{i_0} \colon (a,i_0) \in M\} \ .$$

Cet ensemble est non vide, et a donc un plus petit élément a_0 pour $<_{\alpha_{i_0}}$. Montrons que (a_0,i_0) est le plus petit élément de M : si $(b,j) \in M$, alors on a soit $i_0 <_I j$, auquel cas $(a_0,i_0) < (b,j)$, soit $j = i_0$, auquel cas on a $a_0 \leq_{\alpha_{i_0}} b$ par définition et donc $(a_0,i_0) \leq (b,j)$.
3) Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ trois ordinaux. Notons $A = (\alpha_0 \sqcup \alpha_1) \sqcup \alpha_2$, et $B = \alpha_0 \sqcup (\alpha_1 \sqcup \alpha_2)$.
On peut définir une application $f \colon A \to B$ en posant :

$$f((a,0),0) = (a,0),\ \ f((a,1),0) = ((a,0),1),\ \ f(a,1) = ((a,1),1) \ .$$

La vérification que f est un isomorphisme est immédiate, par conséquent on a bien

$$(\alpha_0 + \alpha_1) + \alpha_2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) \ .$$

Pour voir que la somme n'est pas commutative, notons que $1+\omega$ n'a pas de plus grand élément tandis que $\omega+1$ en a un. Comme $0=\emptyset$, il est clair que $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$ pour tout ordinal α.
Enfin, le seul élément de $\alpha+1$ qui n'est pas contenu dans α est le maximum de $\alpha+1$, ce qui prouve que $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$, autrement dit $\alpha+1$ est le successeur de α.
4) Si $\beta<\beta'$, alors $\beta+1\leq\beta$ et la définition de l'addition ordinale montre que, pour tout α, $\alpha+\beta'+1$ est un segment initial de $\alpha+\beta$; par conséquent $\alpha+\beta'$ est un segment initial strict de $\alpha+\beta$, autrement dit $\alpha+\beta'<\alpha+\beta$. La régularité à gauche en découle immédiatement, puisque si $\beta\neq\gamma$ sont deux ordinaux on a soit $\beta<\gamma$ soit $\gamma<\beta$.
Par contre, on voit que $1+\omega$ est la réunion de ses segments initiaux finis, par conséquent $1+\omega=\omega$ et donc l'addition n'est pas strictement monotone à gauche ni régulière à droite.
Enfin, si $\alpha\leq\alpha'$ alors il existe une injection croissante de $\alpha+\beta$ dans $\alpha'+\beta$, et donc $\alpha+\beta\leq\alpha'+\beta$.
5) L'existence et l'unicité d'une telle opération sont une conséquence du théorème de récurrence transfinie ; par conséquent, on doit simplement montrer que l'addition ordinale a bien les propriétés énumérées au point 5. On a déjà vu que $\alpha+0=0$, et par ailleurs on a par associativité

$$\alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1, \quad \text{autrement dit } \alpha+s(\beta)=s(\alpha+\beta)$$

Finalement, si β est un ordinal limite, alors on a pour tout ordinal α que

$$\alpha\sqcup\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha\sqcup\gamma)\ .$$

De plus, pour l'ordre utilisé pour définir l'addition, chaque $\alpha\sqcup\gamma$ est un segment initial de $(\alpha\sqcup\gamma,<)$, qui est isomorphe à $\alpha+\gamma$. Par conséquent,

$$\alpha+\beta=\cup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma)=\sup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma)\ .$$