Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2008/2009

Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles

Feuille 2.

I. *Bons ordres et suites strictement décroissantes.*
Soit $(A,<)$ un ensemble totalement ordonné. Prouver l'équivalence suivante : $<$ est un bon ordre sur A si, et seulement si, il n'existe pas de suite $(a_n)_{n\geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante pour $<$.
Avez-vous utilisé l'axiome du choix ?

II. *Diverses versions de l'axiome du choix.*
L'axiome du choix peut s'énoncer sous la forme suivante :
(AC) *Pour tout ensemble a dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux il existe un ensemble b dont l'intersection avec chacun des éléments de a est un singleton.*
Une *fonction de choix* sur un ensemble a est une application $\varphi\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ telle que pour tout $x \subset a$ on ait $\varphi(x) \in x$.
On se place maintenant dans ZF ; montrer qu'alors AC est équivalent à chacun des énoncés suivants :
(a) Pour tout ensemble a il existe au moins une fonction de choix sur a.
(b) Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides alors $\Pi_{i\in I} a_i$ est non vide.
(c) Pour tous les ensembles x, y et toute application surjective $g\colon x \to y$, il existe une application $h\colon y \to x$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de y dans y.

III. *Théorème de Zermelo et lemme de Zorn.*
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble Σ des couples $(A, \mathcal{R})$ où $A \subset E$ et $\mathcal{R}$ est une relation de bon ordre sur A. On dit que $(A, \mathcal{R})$ est inférieur à $(A', \mathcal{R}')$, et on note $(A, \mathcal{R}) \leq (A', \mathcal{R}')$, si A est un segment initial de A' (muni de $\mathcal{R}'$) et la relation $\mathcal{R}'$ induit sur A la relation $\mathcal{R}$.
1)Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur Σ.
2) Soit $(A_i, \mathcal{R}_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de Σ. On suppose que pour tout i et tout j de I $(A_i, \mathcal{R}_i)$ est comparable avec $(A_j, \mathcal{R}_j)$ pour $\leq$. Montrer qu'il existe une unique relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\cup_{i\in I} A_i$ qui, pour tout $i \in I$, induise $\mathcal{R}_i$ sur A_i.
3) Montrer que $(A, \mathcal{R}) \in \Sigma$ et qu'il est un majorant de la famille $(A_i, \mathcal{R}_i)_{i\in I}$.
4) Montrer que si $(A, \mathcal{R})$ est un élément maximal de Σ alors on a $A = E$.
5) Montrer que le lemme de Zorn implique le thórème de Zermelo.

IV. *Cantor-Bernstein dans ZF.*
A. Soit A un ensemble, $f\colon A \to A$ une application injective, et B tel que $f(A) \subset B \subset A$. On veut montrer ici que B est alors en bijection avec A.
On pose $A_n = f^n(A)$, $B_n = f^n(B)$ et $C_n = A_n \setminus B_n$.
A.1) On pose $C = \cup_{n\geq 0} C_n$, $D = A \setminus C$. Montrer que $B = f(C) \cup D$, et faire un dessin.
A.2) On pose maintenant, pour $x \in A$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{si } x \in D \end{cases}$$

Montrer que g est une bijection de A sur B.
B. Considérons maintenant deux ensembles X, Y et deux injections $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$.
B.1)En utilisant le fait que $(g \circ f)(X) \subset g(Y) \subset X$ et la question précédente, prouver qu'il existe une bijection de X sur $g(Y)$.
B.2) En déduire une preuve du théorème de Cantor-Bernstein.

V. *Cantor Bernstein dans ZFC.*
Donner une preuve (dans ZFC) du théorème de Cantor-Bernstein.

VI. *Cardinaux réguliers et cofinalité.*
Dans tout cet exercice on se place dans ZFC.
Un cardinal λ est dit régulier si pour tout sous-ensemble a de λ de cardinal strictement inférieur à λ on a $\sup(a) \in \lambda$.
1. Montrer que tout cardinal fini est régulier, ainsi que $\aleph_0$. Le cardinal $\aleph_\omega$ est-il régulier ?
Pour deux ordinaux α et β on dit que α *est cofinal à* β s'il existe une fonction $f : \beta \to \alpha$ strictement croissante et dont l'image n'est pas strictement majorée dans α (autrement dit, pour tout $\gamma \in \alpha$ il existe $\delta \in \beta$ tel que $f(\delta) \geq \gamma$).
2. Montrer que pour tout ordinal α il existe un plus petit ordinal β tel que α est cofinal à β. On appelle cofinalité de α, et on note $\mathrm{cof}(\alpha)$, cet ordinal.
3) Montrer que, pour tout ordinal α, $\mathrm{cof}(\alpha)$ est un cardinal.
4) Que peut-on en déduire sur les ordinaux α tels que $\mathrm{cof}(\alpha) = \alpha$?
5) Quels sont les ordinaux de cofinalité 1 ?
6) Montrer que $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$ pour tout ordinal α.
7) Montrer qu'un cardinal λ infini est régulier si et seulement si $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$.