Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2008/2009
Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Feuille 2.

II. *Diverses versions de l'axiome du choix.*
L'axiome du choix peut s'énoncer sous la forme suivante :
(AC) *Pour tout ensemble a dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux il existe un ensemble b dont l'intersection avec chacun des éléments de a est un singleton.*
Une *fonction de choix* sur un ensemble a est une application $\varphi\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ telle que pour tout $x \subset a$ on ait $\varphi(x) \in x$.
On se place maintenant dans ZF ; montrer qu'alors AC est équivalent à chacun des énoncés suivants :
(a) Pour tout ensemble a il existe au moins une fonction de choix sur a.
(b) Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides alors $\Pi_{i\in I} a_i$ est non vide.
(c) Pour tous les ensembles x, y et toute application surjective $g\colon x \to y$, il existe une application $h\colon y \to x$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de y dans y.

Correction. On va prouver que $(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c)$.
$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$:
Un élément de $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ est une fonction $f\colon I \to \displaystyle\bigcup_{i\in I} a_i$ telle que $f(i) \in A_i$ pour tout i. Autrement dit, un élément de $\displaystyle\prod_{A\in\mathcal{P}(a)\setminus\emptyset} A$ n'est rien d'autre qu'une fonction de choix sur a.
$\underline{(a) \Rightarrow (c)}$:
Définissons

$$a = \bigcup_{y\in Y} \{x \in X\colon g(x) = y\} \ .$$

Par hypothèse, il existe une fonction de choix φ sur a ; on peut s'en servir pour définir $f\colon Y \to X$ en posant

$$f(y) = \varphi(\{x \in X\colon g(x) = y\}) \ .$$

Par définition, on a pour tout y que $g(f(y)) = y$.
$\underline{(c) \Rightarrow (b)}$: Considérons l'application $g\colon \sqcup_{i\in I}\, a_i \to I$ définie par

$$g(x) = i \Leftrightarrow x \in a_i \ .$$

Cette appliation est une surjection puisque chaque a_i est non vide ; il existe donc une application $f\colon I \to \sqcup a_i$ telle que $g \circ f(i) = i$ pour tout $i \in I$, autrement dit telle que $f(i) \in a_i$ pour tout $i \in I$. Comme on l'a vu plus haut, une telle fonction définit un élément de $\Pi_{i\in I} a_i$ (l'élément $(f(i))_{i\in I}$), et donc cet ensemble est non vide.

V. *Cantor Bernstein dans ZFC.*
Donner une preuve (dans ZFC) du théorème de Cantor-Bernstein.

Correction.
Si on se place dans ZFC, alors tout ensemble est bien ordonnable, et donc pour tout ensemble X il existe un unique cardinal $\kappa(X)$ qui soit équipotent à X. De plus, X s'injecte dans Y si, et seulement si, $\kappa(X)$ s'injecte dans $\kappa(Y)$ et donc X s'injecte dans Y si et seulement si $\kappa(X) \leq \kappa(Y)$. Finalement, si X s'injecte dans Y et Y s'injecte dans X alors $\kappa(Y) = \kappa(X) = \kappa$, et X et Y sont tous deux équipotents à κ. Par conséquent il existe une bijection de X sur Y.