
Devoir 1
à retourner le 26 février 2009
(Pour les raisons detaillées sur la page web du cours, ce devoir est facultatif.)

I. On dit qu'un ensemble X est Dedekind-infini *s'il existe une injection non surjective $f\colon X \to X$, autrement dit si X est équipotent à une de ses parties strictes.*
1. L'objectif de cette première question est de montrer qu'un ensemble X est Dedekind-infini si, et seulement si, X contient un sous-ensemble dénombrable, c'est-à-dire équipotent à ω. Pour ce faire nous vous demandons de montrer les trois énoncés suivants :
(a) Tout ensemble dénombrable est Dedekind infini.
(b) Si l'ensemble X contient une partie dénombrable, alors X est un ensemble Dedekind-infini.
(c) Si X est un ensemble Dedekind-infini, alors X contient une partie dénombrable.
*(*Vous pouvez utiliser une construction en recourant à une récurrence qui utilise comme opération principale l'injection f.*)*

Réponse :

(a) Par définition, un ensemble X est dénombrable s'il existe une bijection entre X et ω. Par conséquent, pour répondre à la question, il suffit de trouver une injection non surjective de ω dans ω. En effet, si par exemple $g : \omega \to \omega$ associe $n+1$ à tout $n < \omega$, et que f est la bijection de X vers ω, alors l'application qui associe à chaque $x \in X$, $f^{-1}(g(f(x)))$ une injection non surjective de X dans X.

(b) Soit X un ensemble qui contient une partie dénombrable X_0. D'après le point (a), il existe une injection non surjective g de X_0 dans X_0. On définit alors l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} f & : & X & \longrightarrow & X \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus X_0 \\ g(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La fonction f est une injection non surjective de X dans X.

(c) Soit maintenant X un ensemble Dedekind infini. Par définition, il existe une injection non surjective de X dans X. Notons $f(X)$ l'image directe de X sous l'action de f. D'après le lemme 2.1.2 des notes de cours, la famille $\{f(X), X \setminus f(X)\}$ possède une fonction de choix. Ceci nous permet de choisir un élément x de l'ensemble $X \setminus f(X)$.

Maintenant, le théorème de récurrence permet de construire une suite $(x_n)_{n<\omega}$ où $x_n = \underbrace{f \dots f}_{n \text{ fois}}(x_0)$. Essayons de détailler cette construction à titre d'illustration de l'usage du théorème de récurrence dans ce cas particulier où il ne s'applique qu'aux nombres naturels. En effet, d'après le théorème de récurrence il existe une fonction G et une seule définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccl} G & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & n & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ f(G\lceil n) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Le point qui reste à vérifier est que l'ensemble d'arrivée de la fonction G est infinie. Comme $x \in X \setminus f(X)$ et que f est injective, les éléments de $f(X)$ sont tous distincts.

*2. L'*axiome du choix dénombrable *est l'énoncé suivant : toute famille dénombrable d'ensembles admet une fonction de choix. (*Nous vous référons à la définition 2.1.1 des notes de cours pour la définition d'une fonction de choix*).*
(a) Prouver que l'axiome du choix dénombrable entraîne que tout ensemble infini est Dedekind-infini.
*(*Pour préciser l'énoncé de ce point, il faut définir sans ambiguïté ce que c'est qu'un ensemble infini : c'est un ensemble qui n'est en bijection avec aucun ensemble fini. En conséquence de cette définition et de la partie I.1 de l'exercice, il suffira de vérifier que tout ensemble infini contient une partie dénombrable.*)*
(b) Prouver que l'axiome du choix dénombrable entraîne qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
(c) Réciproquement, montrer que si tout ensemble infini est Dedekind-infini et toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, alors l'axiome du choix dénombrable est vrai.

Réponse :

(a) Soit E un ensemble infini. Alors on peut montrer par récurrence que pour tout $n < \omega$, il existe une partie finie de E en bijection avec n. Notons alors $\mathcal{A}_n$ la famille des parties de E qui sont en bijection avec n ; chaque $\mathcal{A}_n$ est non vide, donc par l'axiome du choix dénombrable on peut choisir un élément dans chaque $\mathcal{A}_n$ et obtenir ainsi une suite de parties (E_n) de X telle que chaque E_n est équipotent à n.
On voudrait maintenant utiliser les E_n pour construire un ensemble dénombrable contenu dans E ; ce serait facile si on avait construit notre suite (E_n) de telle façon qu'elle soit croissante, mais ce n'est pas forcément le cas. Une façon de pallier à ce problème est de remarquer qu'on a nécessairement, pour tout n,

$$E_{2^n} \setminus \bigcup_{i<n} E_{2^i} \neq \emptyset \ .$$

(En effet, $2^n > \sum_{i<n} 2^i = 2^n - 1$)
Mais alors, l'axiome du choix dénombrable nous montre qu'il existe une suite (x_n) telle que

$$\forall n < \omega \ x_n \in E_{2^n} \setminus \bigcup_{i<n} E_{2^i} \ .$$

Par construction, l'ensemble $\{x_n\}$ est une partie dénombrable de X.

(b) Soit $\{E_i \mid i < \omega\}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. A chaque E_i correspond l'ensemble $\mathcal{E}_i$ des énumérations de E_i, en d'autres termes l'ensemble des bijections de ω vers E_i. D'après l'axiome du choix dénombrable, il existe une fonction de choix dont le graphe est donné par des paires $(\mathcal{E}_i, \sigma_i)$ où σ_i est une énumération de $\mathcal{E}_i$. Alors, l'application suivante entre $\omega \times \omega$ et $\bigcup_{i<\omega} E_i$ est définie :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \omega \times \omega & \longrightarrow & \bigcup_{i<\omega} E_i \\ & & (i,j) & \longmapsto & \sigma_i(j) \ . \end{array}$$

Cette application est une bijection si nous considérons l'union disjointe des E_i. Dans ce cas particulier, afin de conclure la dénombrabilité de l'ensemble $\bigcup_{i<\omega} E_i$, il reste à expliciter une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. C'est un exercice.

Dans le cas général où les ensembles E_i ne sont pas nécessairement disjoints, la proposition 2.2.1 (3) des notes de cours suffirait puisque g est une surjection en tous les cas. Néanmoins, la proposition 2.2.1 (3), telle qu'elle est énoncée, nécessite l'axiome du choix en toute sa généralité. L'adaptation de cette proposition au cas dénombrable est un exercice.

(c) Nous vérifierons l'axiome du choix dénombrable à partir des deux hypothèses de l'exercice. Soit donc $\mathcal{E} = \{E_i \mid i < \omega\}$ une famille dénombrable d'ensembles. En utilisant l'hypothèse que tout ensemble infini soit Dedekind infini et le point I.1., nous pouvons supposer chaque E_i dénombrable. Alors, d'après la deuxième hypothèse, l'ensemble $\bigcup_{i<\omega} E_i$ est dénombrable. Par définition de la dénombrabilité, il existe une bijection de ω vers $\bigcup_{i<\omega} E_i$. Alors la fonction suivante définit une fonction de choix sur la famille $\mathcal{E}$.

$$\begin{array}{rcccl} C & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \bigcup_{i<\omega} E_i \\ & & E_i & \longmapsto & g(\inf\{j \in \omega \mid g(j) \in E_i\}) \ . \end{array}$$

II. On souhaite montrer par récurrence transfinie que, pour tout ordinal α les deux énoncés suivants sont équivalents :

$$\text{(A) pour toute paire d'ordinaux } \beta \text{ et } \gamma, \quad \text{si } \beta, \gamma < \alpha, \text{ alors } \beta + \gamma < \alpha \ ;$$

$$\text{(B) pour tout ordinal } \beta, \quad \text{si } \beta < \alpha, \text{ alors } \beta + \alpha = \alpha \ .$$

1. Prouver que, étant donnés deux ordinaux α et β, on a $\alpha \leq \beta + \alpha$.
2. Prouver que (A) implique (B).
3. Prouver que si trois ordinaux α, γ, β sont tels que $\gamma < \alpha$, alors $\beta + \gamma < \beta + \alpha$.
4. Prouver que (B) implique (A).
5. Prouver que tout ordinal ayant la propriété définie par l'équivalence ci-dessus est un ordinal limite ; ω a-t-il cette propriété ? Et ω^2 ?

Réponse :

1. Nous démontrerons l'inégalité en appliquant le principe d'induction (le théorème 1.1 des notes de cours) à la propriéte $P(\alpha, x)$ définie par $x \leq \alpha + x$. Puisque $\emptyset$ est contenu dans tout ensemble, $0 \leq \beta$. Pour tout $\delta < \alpha$ supposons que $\delta \leq \beta + \delta$. Or, d'après le lemme 1.4.1 (b) des notes de cours, $\beta + \delta < \beta + \alpha$. Par conséquent, pour tout $\delta < \beta$, $\delta < \beta + \alpha$. Ainsi, $\alpha \leq \beta + \gamma$.

2. Soit α comme dans l'énoncé. Si $\alpha = \delta + 1$ pour un ordinal δ, alors pour tout $\beta < \alpha$, il découle de (A) que $\beta + \delta < \alpha$. D'après la proposition 1.1.12 (4), $(\beta + \delta) + 1 \leq \alpha$. Ainsi $\beta + \alpha = \beta + (\delta + 1) \leq \alpha$. Si α est un ordinal limite, alors $\beta + \alpha = \sup_{\delta < \alpha}(\beta + \delta)$. D'après (A), pour tout $\delta < \alpha$, $\beta + \delta < \alpha$. Ainsi, $\beta + \alpha \leq \alpha$. Comme l'inégalité $\alpha \leq \beta + \alpha$ est toujours vraie d'après le point précédent, la conclusion (B) est vraie.

3. C'est la proposition 1.4.1 (b).

4. L'implication découle immédiatement du point précédent.

5. L'énoncé de ce point aurait dû être

Prouver que tout ordinal ayant la propriété définie par l'équivalence ci-dessus est soit 1 *soit un ordinal limite.*

En effet, si α n'est pas un ordinal limite, alors α est de la forme $\delta + 1$ pour un ordinal δ. Si $\beta + (\delta + 1) = \delta + 1$, alors $\beta + \delta = \delta$ pour tout $\beta \leq \delta$. En particulier, pour $\delta = \beta$, nous concluons $\delta + \delta = \delta$. Ceci n'est possible que si $\delta = 0$.

Soit $\beta < \omega$. En d'autres termes, β est un nombre naturel. Alors $\beta + \omega = \omega$. La même propriété est vraie pour ω^2 par récurrence.

III. Si α et β sont deux ordinaux, on définit

$$\alpha^{(\beta)} = \{f \colon \beta \to \alpha \mid \{\gamma < \beta | f(\gamma) \neq 0\} \text{ est fini.}\}$$

On définit une relation $<$ sur $\alpha^{(\beta)}$ de la façon suivante : si f et g sont deux éléments distincts de $\alpha^{(\beta)}$, on appelle x_0 le plus grand élément de l'ensemble fini $\{x \in \beta \mid f(x) \neq g(x)\}$, puis on pose

$$f < g \quad \text{si, et seulement si,} \quad f(x_0) < g(x_0) \ .$$

1. Montrer que $<$ est une relation de bon ordre strict sur $\alpha^{(\beta)}$.

Réponse : Nous proposons deux solutions distinctes.

<u>*Solution 1 :*</u>

Pour toute $f \in \alpha^{(\beta)}$, on note

$$\gamma(f) = \sup\{\gamma < \beta \colon f(\gamma) \neq 0\}$$

(alors on a $\gamma(f) = 0$ si f prend constamment la valeur 0)
Ensuite on note, pour tout $\gamma \leq \beta$, $X_\gamma = \{f \in \alpha^{(\beta)} \colon \gamma(f) < \gamma\}$.
Notons que, pour tout $\gamma < \beta$, X_γ muni de l'ordre induit par l'ordre de $\alpha^{(\beta)}$ est isomorphe à $\alpha^{(\gamma)}$, que $X_\beta = \alpha^{(\beta)}$ et que chaque X_γ est un segment initial de $\alpha^{(\beta)}$.
Fixons maintenant α et montrons, par récurrence transfinie sur β, que $<$ est une relation de bon ordre strict sur $\alpha^{(\beta)}$; notons tout de suite que si $\beta = 0$ il n'y a rien à montrer. Puis supposons que $\beta > 0$ et $<$ soit un bon ordre strict sur $\alpha^{(\gamma)}$ pour tout $\gamma < \beta$. Alors il y a deux cas possibles :
<u>β est successeur :</u>
Alors il existe δ tel que $\beta = \delta + 1$. Soit A une partie non vide de $\alpha^{(\beta)}$; si $A \cap X_\delta \neq \emptyset$ alors par hypothèse de récurrence, et d'après le fait que X_δ est un segment initial de X_β, on obtient que A a un plus petit élément. Sinon, on a pour tout $f \in A$ que $f(\delta) > 0$. Soit alors $\gamma = \min\{f(\delta) \colon f \in A\}$. Par définition de $<$, l'ensemble $A_\gamma = \{f \in A \colon f(\delta) = \gamma\}$ est un segment initial de A ; de plus, $(A_\gamma, <)$ est isomorphe à $(\alpha^{(\delta)}, <)$ ce qui montre que A_γ a un plus petit élément, qui est aussi le plus petit élément de A.
<u>β est limite :</u>
Alors soit A une partie non vide de $\alpha^{(\beta)}$; puisque dans ce cas on a $\alpha^{(\beta)} = \cup_{\gamma<\beta} X_\gamma$, il existe nécessairement $\gamma < \beta$ tel que $A \cap X_\gamma$ soit non vide. Cet ensemble a un plus petit élément par hypothèse de récurrence, et est un segment initial de A puisque X_γ est un segment initial de X. Ceci montre que A a un plus petit élément.

<u>*Solution 2 :*</u>

Soit A une partie non vide de $\alpha^{(\beta)}$. On définit alors l'ensemble suivant :

$$B_0 \;=\; \{\gamma \in \beta \mid \text{il existe } f \in A \text{ telle que } \gamma = \max\{x \in \beta \mid f(x) \neq 0\}\} \;.$$

Pour une fonction dans $\alpha^{(\beta)}$, nous utiliserons l'appellation "support" pour les éléments de l'ensemble de départ d'images non nulles.

Si B_0 est vide, alors A est le singleton formé par l'application nulle. Dans ce cas, il n'y a rien à faire. Sinon, B_0 étant un ensemble d'ordinaux, a un plus petit élément que nous noterons γ_0. Soit maintenant

$$C_0^+ \;=\; \{f \in A \mid \gamma_0 = \max\{x \in \beta \mid f(x) \neq 0\}\} \;.$$

Comme B_0 est non vide, il en est de même pour C_0^+. Alors, on définit

$$C_0 \;=\; \{f \in C_0^+ \mid f(\gamma_0) = \inf\{g(\gamma_0) \mid g \in C_0^+\}\} \;.$$

Si l'ensemble C_0 est un singleton, alors son seul membre est le plus petit élément recherché. Sinon, on procède de manière récursive.

Supposons maintenant C_i, B_i, γ_i défini avec au moins deux éléments, où $i \in \omega$. Nous construirons C_{i+1}. Si parmi les éléments de C_i, il en existe un dont le support ne contient que $i+1$ éléments, par construction cette fonction épuisée est le plus petit élément recherché. Sinon, on pose

$$B_{i+1} \;=\; \{\gamma \in \beta \mid \text{il existe } f \in C_i \text{ telle que } \gamma = \max\{x \in \beta \setminus \{\gamma_0, \ldots, \gamma_i\} \mid f(x) \neq 0\}\}$$

Dans le cas présent, B_{i+1} n'est pas vide. Soit γ_{i+1} son plus petit élément. Nous définissons alors

$$C_{i+1}^+ \;=\; \{f \in C_i \mid \gamma_{i+1} = \max\{x \in \beta \setminus \{\gamma_0, \ldots, \gamma_i\} \mid f(x) \neq 0\}\} \;.$$

Comme B_{i+1} est non vide, il en est de même pour C_{i+1}^+. Suite à ce constat, nous définissons finalement

$$C_{i+1} \;=\; \{f \in C_{i+1}^+ \mid f(\gamma_{i+1}) = \inf\{g(\gamma_{i+1}) \mid g \in C_{i+1}^+\}\} \;.$$

Cette construction s'arrête pour l'une des deux raisons suivantes : l'ensemble C_{i+1} peut être un singleton, dans lequel cas, son seul membre est le plus petit élément de A ; si ce cas de figure ne se produit pas, comme par construction les C_i déjà construites correspondent à des fonctions qui ont les mêmes valeurs sur les $i+1$ plus grands membres de leurs supports, il existe une étape à laquelle une fonction s'épuisera avant les autres. Cette fonction épuisée sera le plus petit élément.

2. Dans la suite, α, β, γ désignent trois ordinaux. Il existe un unique ordinal isomorphe à $(\alpha^{(\beta)}, <)$; on souhaite démontrer que cet ordinal est égal à α^β. Dans l'immédiat, appelons cet ordinal $\Phi(\alpha, \beta)$.
(a) Montrer que $\Phi(\alpha, 0) = 1$.
(b) Prouver que si $\beta < \gamma$, alors $\Phi(\alpha, \beta) < \Phi(\alpha, \gamma)$.
(c) Supposons que β soit un ordinal limite. Prouver que

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sup \{\Phi(\alpha, \gamma) \colon \gamma < \beta\} \ .$$

(d) Prouver que

$$\Phi(\alpha, \beta+1) = \Phi(\alpha, \beta).\alpha \ .$$

*(*Vous pouvez utiliser la représentation du produit de deux ordinaux sur le produit cartésien de leurs ensembles sous-jacents qui utilise l'ordre lexicographique. L'ordre sur $\Phi(\alpha, \beta+1)$ étend celui sur $\Phi(\alpha, \beta)$. *)*
(e) En déduire que, comme annoncé, $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$.

Réponse :

(a) L'ordinal $(\Phi(\alpha, 0), \in)$ est isomorphe à $(\alpha^{(0)}, <)$. Or, il existe une seule fonction de l'ensemble vide vers α, c'est l'ensemble vide.

(b) Soient β et γ deux ordinaux comme dans l'énoncé de l'exercice. Si $f \in \alpha^{(\beta)}$ alors f s'étend à une fonction dans $\alpha^{(\gamma)}$ comme suit :

$$\begin{array}{cccl} \bar{f} & : & \gamma & \longrightarrow & \alpha \\ & & \delta & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(\delta) & \text{si } \delta < \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq \delta \end{array} \right. \end{array}$$

L'association de $\bar{f}$ à f définit une injection de $f \in \alpha^{(\beta)}$ dans $\alpha^{(\gamma)}$ qui préserve l'ordre de $\alpha^{(\beta)}$. Il en découle que $\Phi(\alpha, \beta) < \Phi(\alpha, \gamma)$.

(c) Il découle du point (b) que $\sup \{\Phi(\alpha, \gamma) \colon \gamma < \beta\} \leq \Phi(\alpha, \beta)$ puisque pour tout $\gamma < \beta$, $\Phi(\alpha, \gamma) \leq \Phi(\alpha, \beta)$. Pour l'autre inégalité, il suffit de constater que, β étant limite, toute fonction dans $\alpha^{(\beta)}$ a son support dans un ordinal $\gamma < \beta$. Ainsi toute telle fonction appartient aussi à $\alpha^{(\gamma)}$, et la compatibilité des isomorphismes entre les $(\alpha^{(\gamma)}, <)$ et $(\Phi(\alpha, \gamma), \in)$ permet de les étendre uniformément à un isomorphisme entre $(\alpha^{(\beta)}, <)$ et $(\Phi(\alpha, \beta), \in)$.

(d) Pour vérifier la conclusion de ce point nous supposerons établi l'isomorphisme entre $\alpha^{(\beta)}$ et l'ordinal $\Phi(\alpha, \beta)$.

Par définition, $\alpha^{(\beta+1)}$ est l'ensemble des fonctions de support fini de $\beta + 1$ vers α. Si $f \in \alpha^{(\beta+1)}$, alors la restriction de f à β, $f\lceil\beta$ en notation, est un élément de $\alpha^{(\beta)}$, et le graphe de f est l'union de celui de $f\lceil\beta$ avec le singleton (β, δ) où $\delta \in \alpha$. Il découle de cette remarque et de la définition de l'ordre $<$ sur l'ensemble $\alpha^{(\beta+1)}$ que pour deux éléments f et g de $\alpha^{(\beta+1)}$, $f < g$ si et seulement si $f(\beta) \in g(\beta)$ ou $f\lceil\beta < g\lceil\beta$. Par conséquent, la bijection

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T} & : & \alpha^{(\beta+1)} & \longrightarrow & \alpha^{(\beta)} \times \alpha \\ & & f & \longmapsto & (f\lceil\alpha^{(\beta)}, f(\beta)) \end{array}$$

est un isomorphisme entre la structure $(\alpha^{(\beta+1)}, <)$ et $\alpha^{(\beta)} \times \alpha$ ordonné par l'ordre lexicographique. Or, $(\alpha^{(\beta)}, <)$ est par hypothèse isomorphe à l'ordinal $\Phi(\alpha, \beta)$. Ainsi, $(\alpha^{(\beta+1)}, <)$ est isomorphe à $\Phi(\alpha, \beta).\alpha$, et nous concluons que $\Phi(\alpha, \beta+1) = \Phi(\alpha, \beta).\alpha$.

(e) Ce point récapitule les points précédents en recourant à la récurrence sur β. Quand $\beta = 0$, le point (a) fournit la réponse. Si β est un ordinal limite, pour $\gamma < \beta$, par récurrence $\Phi(\alpha, \gamma) = \alpha^\gamma$. Alors,

$$\Phi(\alpha, \beta) \stackrel{(c)}{=} \sup\{\Phi(\alpha, \gamma) \mid \gamma \in \beta\} = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\} = \alpha^\beta \ .$$

Quant au cas successeur,

$$\Phi(\alpha, \beta+1) \overset{(d)}{=} \Phi(\alpha, \beta).\alpha = \alpha^{\beta}.\alpha = \alpha^{\beta+1} \ .$$