Devoir 1
à retourner le 26 février 2009
(Pour les raisons detaillées sur la page web du cours, ce devoir est facultatif.)

I. On dit qu'un ensemble X est *Dedekind-infini* s'il existe une injection non surjective $f\colon X \to X$, autrement dit si X est équipotent à une de ses parties strictes.
1. L'objectif de cette première question est de montrer qu'un ensemble X est Dedekind-infini si, et seulement si, X contient un sous-ensemble dénombrable, c'est-à-dire équipotent à ω. Pour ce faire nous vous demandons de montrer les trois énoncés suivants :
(a) Tout ensemble dénombrable est Dedekind infini.
(b) Si l'ensemble X contient une partie dénombrable, alors X est un ensemble Dedekind-infini.
(c) Si X est un ensemble Dedekind-infini, alors X contient une partie dénombrable.
(*Vous pouvez utiliser une construction en recourant à une récurrence qui utilise comme opération principale l'injection f.*)

2. L'*axiome du choix dénombrable* est l'énoncé suivant : toute famille dénombrable d'ensembles admet une fonction de choix. (*Nous vous référons à la définition 2.1.1 des notes de cours pour la définition d'une fonction de choix*).
(a) Prouver que l'axiome du choix dénombrable entraîne que tout ensemble infini est Dedekind-infini.
(*Pour préciser l'énoncé de ce point, il faut définir sans ambiguïté ce que c'est qu'un ensemble infini : c'est un ensemble qui n'est en bijection avec aucun ensemble fini. En conséquence de cette définition et de la partie I.1 de l'exercice, il suffira de vérifier que tout ensemble infini contient une partie dénombrable.*)
(b) Prouver que l'axiome du choix dénombrable entraîne qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
(c) Réciproquement, montrer que si tout ensemble infini est Dedekind-infini et toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, alors l'axiome du choix dénombrable est vrai.

II. On souhaite montrer par récurrence transfinie que, pour tout ordinal α les deux énoncés suivants sont équivalents :

$$\text{(A) pour toute paire d'ordinaux } \beta \text{ et } \gamma, \quad \text{si } \beta, \gamma < \alpha, \text{ alors } \beta + \gamma < \alpha \,;$$

$$\text{(B) pour tout ordinal } \beta, \quad \text{si } \beta < \alpha, \text{ alors } \beta + \alpha = \alpha \,.$$

1. Prouver que, étant donnés deux ordinaux α et β, on a $\alpha \leq \beta + \alpha$.
2. Prouver que (A) implique (B).
3. Prouver que si trois ordinaux α, γ, β sont tels que $\gamma < \alpha$, alors $\beta + \gamma < \beta + \alpha$.
4. Prouver que (B) implique (A).
5. Prouver que tout ordinal ayant la propriété définie par l'équivalence ci-dessus est un ordinal limite ; ω a-t-il cette propriété ? Et ω^2 ?

III. Si α et β sont deux ordinaux, on définit

$$\alpha^{(\beta)} = \{f\colon \beta \to \alpha \mid \{\gamma < \beta | f(\gamma) \neq 0\} \text{ est fini.}\}$$

On définit une relation $<$ sur $\alpha^{(\beta)}$ de la façon suivante : si f et g sont deux éléments distincts de $\alpha^{(\beta)}$, on appelle x_0 le plus grand élément de l'ensemble fini $\{x \in \beta \mid f(x) \neq g(x)\}$, puis on pose

$$f < g \quad \text{si, et seulement si,} \quad f(x_0) < g(x_0) \ .$$

1. Montrer que $<$ est une relation de bon ordre strict sur $\alpha^{(\beta)}$.
2. Dans la suite, α, β, γ désignent trois ordinaux. Il existe un unique ordinal isomorphe à $(\alpha^{(\beta)}, <)$; on souhaite démontrer que cet ordinal est égal à α^{β}. Dans l'immédiat, appelons cet ordinal $\Phi(\alpha, \beta)$.
(a) Montrer que $\Phi(\alpha, 0) = 1$.
(b) Prouver que si $\beta < \gamma$, alors $\Phi(\alpha, \beta) < \Phi(\alpha, \gamma)$.
(c) Supposons que β soit un ordinal limite. Prouver que

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sup \{\Phi(\alpha, \gamma) \colon \gamma < \beta\} \ .$$

(d) Prouver que

$$\Phi(\alpha, \beta + 1) = \Phi(\alpha, \beta).\alpha \ .$$

(*Vous pouvez utiliser la représentation du produit de deux ordinaux sur le produit cartésien de leurs ensembles sous-jacents qui utilise l'ordre lexicographique. L'ordre sur $\Phi(\alpha, \beta + 1)$ étend celui sur $\Phi(\alpha, \beta)$.*)
(e) En déduire que, comme annoncé, $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha^{\beta}$.