Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2008/2009
Logique et théorie des ensembles

Devoir 2
à retourner le 26 mars 2009
(Pour les raisons bien connues, ce devoir est facultatif.)

I. *Equivalents de l'axiome du choix.*
1. Montrer que l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant :

pour toute paire d'ensembles A et B, soit $|A| \leq |B|$, soit $|B| \leq |A|$.

Réponse : D'après la proposition 2.2.1 des notes de cours, la condition est nécessaire. Essayons de montrer qu'elle est suffisante. Nous utiliserons l'ordinal h introduit dans la définition 1.6.6 des notes de cours afin de montrer que tout ensemble est bien ordonnable, énoncé équivalent à l'axiome du choix.

Soit E un ensemble quelconque. D'après l'hypothèse de l'exercice, soit $h(E) \leq |E|$, soit $|E| \leq h(E)$. Or, par définition de $h(E)$, il n'est pas possible que $h(E) \leq |E|$. Ainsi, il existe une injection de E vers $h(E)$. D'après le lemme 1.6.7 des notes de cours, $h(E)$ est un cardinal. Cette injection permet de transférer le bon ordre de $h(E)$ sur E.

2. Montrer que l'axiome du choix est équivalent à chacun des énoncés suivants :

Si X et Y sont deux ensembles infinis alors $X \sqcup Y$ est équipotent à X ou à Y.

Si X et Y sont deux ensembles infinis alors $X \times Y$ est équipotent à X ou à Y.

On rappelle que $X \sqcup Y$ désigne l'union disjointe de X et Y.

Réponse : Montrons d'abord l'équivalence du premier énoncé à l'axiome du choix. En fait, nous montrerons équivalence de la condition à la conclusion du premier point.

Supposons que soit $|X| \leq |Y|$ soit $|Y| \leq |X|$. Par ailleurs, l'usage de l'application identique de domaine X ou Y montre que $|X| \leq |X \sqcup Y|$ et $|Y| \leq |X \sqcup Y|$. Alors la conclusion découle du corollaire 3.2.5 (1) des notes de cours. Dans l'autre sens, supposons la condition vraie. Soient alors X et Y deux ensembles. L'application identique permet de conclure que $|X| \leq |X \sqcup Y|$ et $|Y| \leq |X \sqcup Y|$. Or d'après la condition, soit $|X| = |X \sqcup Y|$ soit $|Y| = |X \sqcup Y|$.

L'équivalence de la condition impliquant le produit cartésien se montre de la même façon mais en utilisant le corollaire 3.2.4 (1).

II.*Révision des définitions.*
Montrer que la réunion d'un ensemble de cardinaux est un cardinal.

Réponse : Soit E un ensemble de cardinaux. D'après la proposition 1.1.12 (4) des notes de cours, la réunion des éléments de E est un ordinal. Appelons cette réunion α et supposons que le cardinal $\kappa = |\alpha|$ soit strictement plus petit que α. Comme α est la réunion de tous les éléments de E, il existe un ordinal $\beta \in E$ tel que $\kappa < \beta < \alpha$. Or, par hypothèse, tous les éléments de E sont des cardinaux. Ainsi, β est un cardinal, ce qui contredit la définition de κ.

Dans les deux exercices qui suivent, on suppose que l'axiome du choix est vrai ; on pourra utiliser sans preuve les conséquences de (AC) sur l'arithmétique des cardinaux qui ont été démontrées en cours.

III. *Factorielles infinies.*
Si X est un ensemble, on notera dans la suite $Sym(X)$ l'ensemble des bijections de X dans X.
1. On dit que $f \in Sym(X)$ est une transposition *s'il existe $x, y \in X$ distincts tels que $f(x) = y$, $f(y) = x$ et $f(z) = z$ pour tout $z \in X \setminus \{x, y\}$. Calculer le cardinal de l'ensemble des transpositions de X en fonction du cardinal de X.*

Réponse : L'ensemble des transpositions de X est en bijection avec l'ensemble

$$\tau \;=\; \{(x,y) \mid x, y \in X \;,\; x \neq y\} \;.$$

Si X est un ensemble fini, alors le cardinal recherché est

$$\frac{1}{2}|X|(|X|-1) \;.$$

Si X est infini, nous procédons pour établir une bijection entre X et τ. Comme nous nous sommes permis de parler du "cardinal de X", nous nous permettons aussi de remplacer X par un cardinal κ.

$$\begin{array}{rccl} \iota & : & \kappa & \longrightarrow & \tau \\ & & \alpha & \longmapsto & (\alpha, \inf\{\beta < \kappa \mid \alpha < \beta\}) \end{array}$$

L'application ι est une injection. Ainsi $\kappa \leq |\tau|$. Or, τ étant une partie de $\kappa \times \kappa$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$|\tau| \;\leq\; \kappa \times \kappa \;=\; \kappa \;.$$

2. Montrer que si X et Y sont équipotents alors $Sym(X)$ et $Sym(Y)$ sont équipotents.

Réponse : Les ensembles X et Y sont équipotents si et seulement s'il existe une bijection f de X vers Y. Alors, nous définissons l'application suivante :

$$\begin{array}{rcccl} \theta & : & Sym(X) & \longrightarrow & Sym(Y) \\ & & \sigma & \longmapsto & \theta(\sigma) : \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \\ y & \longmapsto & f \circ \sigma \circ f^{-1}(y) \end{array} \right. \end{array}$$

L'application θ est la bijection recherchée.

Grâce au point 2 ci-dessus, on peut associer à tout cardinal κ le cardinal $\kappa! = |Sym(\kappa)|$.
3. Montrer que pour tout cardinal infini κ on a $\kappa! = 2^\kappa$.

Réponse : Montrons d'abord que $2^\kappa \leq \kappa!$. Pour ce faire, nous construisons une injection de $\mathcal{P}(\kappa)$ vers $Sym(\kappa)$. En effet, pour chaque $X \subset \kappa$ il suffit de "choisir" une permutation de κ dont le support est exactement X.

Pour montrer que $\kappa! \leq 2^\kappa$, nous notons que, $Sym(\kappa)$ étant un sous-ensemble des applications de κ vers κ, $\kappa! \leq \kappa^\kappa$. La conclusion découle alors du point IV (1).

IV. *Un peu d'arithmétique cardinale.*
1. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.

Réponse : Les inégalités et égalités suivantes sont vraies :

$$\kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa.\kappa} = 2^\kappa \;.$$

L'autre inégalité est claire.

2. Montrer que $\prod_{n \in \omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Réponse : L'énoncé de cet exercice aurait dû être tel qu'il est écrit ci-dessus. Pour établir l'inégalité

$$\prod_{n\in\omega} \aleph_n \leq \aleph_\omega^{\aleph_0} ,$$

il suffit de considérer l'ensemble $\prod_{n\in\omega} \aleph_n$ comme celui des applications de $\aleph_0$ vers $\aleph_\omega$. Dans l'autre direction, il suffit de constater que

$$\aleph_\omega = \bigcup_{i<\omega} \aleph_i .$$