Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2008/2009
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Devoir 2
à retourner le 26 mars 2009
(Pour les raisons bien connues, ce devoir est facultatif.)

I. .*Equivalents de l'axiome du choix.*
1. Montrer que l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant :

pour toute paire d'ensembles A et B, soit $|A| \leq |B|$, soit $|B| \leq |A|$.

2. Montrer que l'axiome du choix est équivalent à chacun des énoncés suivants :

Si X et Y sont deux ensembles infinis alors $X \sqcup Y$ est équipotent à X ou à Y.

Si X et Y sont deux ensembles infinis alors $X \times Y$ est équipotent à X ou à Y.

On rappelle que $X \sqcup Y$ désigne l'union disjointe de X et Y.

II.*Révision des définitions.*
Montrer que la réunion d'un ensemble de cardinaux est un cardinal.

Dans les deux exercices qui suivent, on suppose que l'axiome du choix est vrai ; on pourra utiliser sans preuve les conséquences de (AC) sur l'arithmétique des cardinaux qui ont été démontrées en cours.

III. *Factorielles infinies.*
Si X est un ensemble, on notera dans la suite $Sym(X)$ l'ensemble des bijections de X dans X.
1. On dit que $f \in Sym(X)$ est une *transposition* s'il existe $x, y \in X$ distincts tels que $f(x) = y$, $f(y) = x$ et $f(z) = z$ pour tout $z \in X \setminus \{x, y\}$. Calculer le cardinal de l'ensemble des transpositions de X en fonction du cardinal de X.
2. Montrer que si X et Y sont équipotents alors $Sym(X)$ et $Sym(Y)$ sont équipotents.
Grâce au point 2 ci-dessus, on peut associer à tout cardinal κ le cardinal $\kappa! = |Sym(\kappa)|$.
3. Montrer que pour tout cardinal infini κ on a $\kappa! = 2^\kappa$.

IV. *Un peu d'arithmétique cardinale.*
1. Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
2. Montrer que $\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_0^{\aleph_\omega}$.