

Devoir 3
à retourner le 9 avril 2009
(Pour les raisons bien connues, ce devoir est facultatif.)

I. *Test de Tarski.*

Oui, oui, même les enseignants disent la vérité de temps en temps, c'est un exercice de montrer que la condition du test de Tarski est suffisante.

II. *Morphismes.*

Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure d'univers M . Nous posons $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_m \mid m \in M\}$. Soit alors \mathcal{N}^+ une \mathcal{L}^+ -structure dont le réduct au langage \mathcal{L} sera noté \mathcal{N} et qui satisfait la condition suivante : pour toute \mathcal{L} -formule atomique $\phi(x_1, \dots, x_k)$ de variables libres parmi $\{x_1, \dots, x_k\}$, si ϕ est satisfaite dans \mathcal{M} par $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$ alors $\mathcal{N}^+ \models \phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k})$. Montrer qu'il existe un morphisme de \mathcal{M} vers \mathcal{N} .

Réponse : Nous noterons M et N les univers de \mathcal{M} et \mathcal{N} respectivement. Nous définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \nu &: M \longrightarrow N \\ m &\longmapsto c_m^{\mathcal{N}^+} \end{aligned}$$

Nous montrerons que ν est un homomorphisme.

Soit f un symbole de fonction k -aire dans le langage \mathcal{L} . Alors $x_{k+1} = f(x_1, \dots, x_k)$ est une formule du premier ordre. Pour tout $(m_1, \dots, m_k, m_{k+1}) \in M^{k+1}$,

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k) = m_{k+1} & \text{ si et seulement si } \mathcal{N}^+ \models c_{m_{k+1}} = f(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \\ & \text{ si et seulement si } \mathcal{N} \models x_{k+1} = f(x_1, \dots, x_k)[(c_{m_1}^{\mathcal{N}^+}, \dots, c_{m_k}^{\mathcal{N}^+}, c_{m_{k+1}}^{\mathcal{N}^+})] \\ & \text{ si et seulement si } f^{\mathcal{N}}(c_{m_1}^{\mathcal{N}^+}, \dots, c_{m_k}^{\mathcal{N}^+}) = c_{m_{k+1}}^{\mathcal{N}^+} \\ & \text{ si et seulement si } f^{\mathcal{N}}(\nu(m_1), \dots, \nu(m_k)) = \nu(m_{k+1}) \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\nu(f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k)) = f^{\mathcal{N}}(\nu(m_1), \dots, \nu(m_k))$$

pour tout $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$.

Soit c , un symbole de constante de \mathcal{L} . La formule $x = c$ est une formule du premier ordre, et elle est satisfaite dans \mathcal{M} par $c^{\mathcal{M}}$. Alors,

$$\mathcal{N}^+ \models c_{c^{\mathcal{M}}}^{\mathcal{N}^+} = c.$$

Ceci équivaut à $\nu(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$.

Finalement, soit $R(x_1, \dots, x_k)$ un symbole de relation k -aire dans \mathcal{L} . Si $R^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k)$, alors par hypothèse,

$$\mathcal{N}^+ \models R(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}).$$

Or ceci équivaut à dire que $(c_{m_1}^{\mathcal{N}^+}, \dots, c_{m_k}^{\mathcal{N}^+})$ est en relation $R^{\mathcal{N}}$.

III. *Relations d'équivalence.*

Soit $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire.

1. *Ecrire les énoncés du premier ordre qui expriment que E est une relation d'équivalence.*

Réponse :

$$\forall xyz((E(x, x)) \wedge (E(x, y) \rightarrow E(y, x)) \wedge (E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z)))$$

Nous noterons ϵ l'énoncé précédent.

2. *Ecrire les énoncés du premier ordre qui expriment que E est une relation d'équivalence à exactement k classes avec $k \in \mathbb{N}^*$.*

Réponse :

$$\epsilon \wedge \exists x_1 \dots x_k \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} \neg E(x_i, x_j) \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{1 \leq i \leq k} E(x, x_i) \right)$$

Nous noterons cet énoncé ϵ_k . 3. *Ecrire les énoncés du premier ordre qui expriment que E est une relation d'équivalence à exactement k classes avec $k \in \mathbb{N}^*$ et dont toutes les classes sont infinies. Trouver un modèle de ces énoncés.*

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x_{n+1} \exists x_1 \dots x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} E(x_i, x_{n+1}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$$

Nous noterons cet énoncé $\epsilon_{(k,n)}$. Alors un modèle de l'ensemble d'énoncés $\{\epsilon_{(k,n)} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ a les propriétés recherchées. Voici un exemple d'une telle structure : l'univers est

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \in \{0, \dots, k-1\} \text{ et } y \in \mathbb{N}\},$$

tandis que la relation d'équivalence est donnée par

$$(x, y) \text{ est en relation avec } (x', y') \text{ si et seulement si } x = x'.$$

4. *Soit maintenant $\mathcal{L}' = \{E_i \mid i < \omega\}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire. Ecrire les énoncés qui disent que chaque E_i est une relation d'équivalence et que la condition suivante est satisfaite : pour tout $i < \omega$, E_{i+1} divise chaque classe de E_i en une infinité de classes. Trouver un modèle de ces énoncés.*

Réponse : Notons $\epsilon(E_i)$ l'énoncé qui dit que E_i est une relation d'équivalence.

$$e_i \ (i \in \mathbb{N}) : \forall xy(E_{i+1}(x, y) \rightarrow E_i(x, y)).$$

$$e_{(i,n)} \ (i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*) : \forall x \exists x_1 \dots x_n \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq n} E_i(x, x_j) \wedge \bigwedge_{1 \leq j < k \leq n} \neg E_i(x_j, x_k) \right).$$

Un modèle de l'ensemble $\{\epsilon(E_i), e_i, e_{(i,n)} \mid i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\}$ satisfera les conditions imposées.

Une structure qui est modèle de ces énoncés est la suivante : l'univers est formé des suites de nombres naturels, et deux suites sont en relation E_i si et seulement si leurs segments initiaux de taille i sont égaux. C'est une structure large de cardinal 2^{\aleph_0} . Nous pouvons nous contenter de l'ensemble des suites éventuellement nulles. C'est un ensemble dénombrable.

IV. Incidences.

Nous posons $\mathcal{L} = \{P, L, I\}$, où P et L sont deux symboles de relation unaires et I est un symbole de relation

binaire. Intuitivement, P signifiera un “point”, L une “ligne” et I une relation d’ “incidence” entre les lignes et les points.

1. Ecrire les énoncés \prod_n ($n \in \mathbb{N}$) qui expriment les propriétés suivantes :

\prod_0 Il existe un point ; il existe une ligne.

\prod_1 Tout élément est un point (P) ou une ligne (L) mais pas tous les deux.

\prod_2 L’incidence (I) est une relation symétrique ; quand une paire d’éléments sont incidents, l’un d’entre eux est un point et l’autre est une ligne.

\prod_{3n} ($n \in \mathbb{N}^*$) Tout(e) point (resp. ligne) est incident(e) avec une infinité de lignes (resp. points).

Réponse :

\prod_0 $\exists xP(x) ; \exists xL(x)$.

\prod_1 $\forall x((P(x) \vee L(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge L(x)))$.

\prod_2 $\forall x_1x_2(I(x_1, x_2) \rightarrow (I(x_2, x_1) \wedge ((P(x_1) \wedge L(x_2)) \vee (P(x_2) \wedge L(x_1))))$.

\prod_{3n} ($n \in \mathbb{N}^*$) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists x_1 \dots x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} L(x_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} I(x, x_i))) ;$
 $\forall x(L(x) \rightarrow \exists x_1 \dots x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} P(x_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} I(x, x_i)))$.

Déduire de ces énoncés qu’il n’existe pas de “polygones pairs” ; en d’autres termes qu’il n’existe pas de x_0, x_1, \dots, x_n distincts avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pair tels que $I(x_i, x_{i-1})$ pour tout $i \leq n - 1$ et que $I(x_n, x_0)$.

Réponse : Effectivement, l’existence d’un polygone pair contredirait \prod_1 et \prod_2 .

Ecrire maintenant le schéma d’énoncés \prod_{4n} , avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, qui énoncent la non existence des polygones (ou polygones impairs puisque les pairs sont de facto exclus).

Réponse :

$$\neg \exists x_0 \dots x_n \left(\bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{0 \leq i \leq n-1} I(x_i, x_{i+1}) \wedge I(x_0, x_n) \right).$$

2. Vérifier que la structure suivante est un modèle des énoncés \prod_i du point 1 :

univers la base est $\omega^{<\omega}$, les suites finies de nombres naturels ;

points les points sont les suites de longueur paire (y incluse la suite vide de longueur 0) ;

lignes les lignes sont les suites de longueur impaire ;

incidence une suite de longueur $k \in \mathbb{N}$ est incidente avec une suite de longueur $k + 1$ si et seulement si elle est le segment initial de celle-ci ;

une suite de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ est incidente avec une suite de longueur $k - 1$ si celle-ci est son segment initial ;

une suite n’est incidente avec aucune suite qui ne vérifie pas les deux conditions ci-dessus.

Réponse : La vérification de la nonexistence des polygones nécessite un peu plus de travail. L’existence d’un polygone équivaut à l’existence d’une suite finie (x_0, \dots, x_K) ($K \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) de suites finies et distinctes de nombres naturels liées par l’incidence définie ci-dessus. Parmi ces suites, fixons-en une de longueur maximale. Si cette suite est x_i alors les suites x_{i-1} et x_{i+1} (l’arithmétique sur les indices est modulo $K + 1$) sont le segment initial de x_i de longueur celle de x_i moins 1. Or, x_i n’a qu’un seul segment initial de cette taille, et par conséquent $x_{i-1} = x_{i+1}$, une contradiction.

3. Montrer que la théorie du premier ordre formée par les conséquences des énoncés \prod_i a une infinité de modèles dénombrables deux à deux non isomorphes.

Réponse : Pour répondre à cette question, une approche efficace est de traiter un modèle de la théorie en question comme un graphe dont les vertex sont les points et les lignes, et les arêtes expriment la relation

d'incidence. Ce graphe peut être connexe, ce qui est le cas de la structure d'univers $\omega^{<\omega}$ puisque toutes les suites sont liées grâce à l'existence de la suite vide.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe formé par n copies disjointes de $\omega^{<\omega}$ (n composantes connexes du graphe) est un modèle (pourquoi?) de notre théorie. En plus, pour deux choix distincts de n , nous obtenons deux modèles non isomorphes. La vérification de cet conclusion, qui par ailleurs répond à la question, est un exercice utile et simple.

V. *Groupes, sous-groupes élémentaires.*

Nous considérons le "langage des groupes", $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$. Soit \mathcal{G} un groupe en tant que \mathcal{L} -structure. Nous noterons G son univers.

1. Montrer que \mathcal{G} est simple si et seulement si pour tout $x \in G$ et $y \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que,

$$\mathcal{G} \models x \neq 1 \rightarrow \exists z_1 \dots z_n (y = (x^{\pm 1})^{z_1} \dots (x^{\pm 1})^{z_n}).$$

Remarque sur la notation : Pour un groupe arbitraire G et deux éléments $x, y \in G$, la notation x^y veut dire $y^{-1}xy$, en d'autres termes le conjugué de x par (ou sous l'action de) y .

Réponse : Pour tout groupe \mathcal{G} d'univers G et tout élément $x \in G$, l'ensemble

$$\{(x^{\pm 1})^{z_1} \dots (x^{\pm 1})^{z_n} \mid \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq G, n \in \mathbb{N}\}$$

est le plus petit sous-groupe distingué de G contenant x . Si $x \neq 1$, Alors \mathcal{G} est simple si et seulement si pour tout $x \neq 1$ $G = \{(x^{\pm 1})^{z_1} \dots (x^{\pm 1})^{z_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. Montrer que si \mathcal{G} est un groupe simple et que \mathcal{H} est un sous-groupe élémentaire, en d'autres termes, un sous-groupe de \mathcal{G} tel que $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$, alors \mathcal{H} est simple aussi.

Réponse : Soit $\phi_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(x, y)$ la formule

$$x \neq 1 \rightarrow \exists z_1 \dots z_n (y = (x^{\epsilon_1})^{z_1} \dots (x^{\epsilon_n})^{z_n})$$

où $\epsilon_i = \pm 1$. Notons l'univers de \mathcal{H} par H . Comme par hypothèse $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$, pour $(h_1, h_2) \in H^2$,

$$\mathcal{G} \models \phi_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(x, y)[(h_1, h_2)] \text{ si et seulement si } \mathcal{H} \models \phi_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}(x, y)[(h_1, h_2)]$$

La simplicité de \mathcal{H} en découle en recourant au premier point.

3. Que pouvez-vous conclure pour une extension élémentaire de \mathcal{G} ?

Réponse : Nous attendons les vôtres.