Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2008/2009
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Devoir 3
à retourner le 9 avril 2009
(Pour les raisons bien connues, ce devoir est facultatif.)

I. *Test de Tarski.*
Oui, oui, même les enseignants disent la vérité de temps en temps, c'est un exercice de montrer que la condition du test de Tarski est suffisante.

II. *Morphismes.*
Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'univers M. Nous posons $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_m \mid m \in M\}$. Soit alors $\mathcal{N}^+$ une $\mathcal{L}^+$-structure dont le réduit au langage $\mathcal{L}$ sera noté $\mathcal{N}$ et qui satisfait la condition suivante : pour toute $\mathcal{L}$-formule atomique $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ de variables libres parmi $\{x_1, \ldots, x_k\}$, si ϕ est satisfaite dans $\mathcal{M}$ par $(m_1, \ldots, m_k) \in M^k$ alors $\mathcal{N}^+ \models \phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k})$. Montrer qu'il existe un morphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$.

III. *Relations d'équivalence.*
Soit $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire.
1. Ecrire les énoncés du premier ordre qui expriment que E est une relation d'équivalence.
2. Ecrire les énoncés du premier ordre qui expriment que E est une relation d'équivalence à exactement k classes avec $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Ecrire les énoncés du premier ordre qui expriment que E est une relation d'équivalence à exactement k classes avec $k \in \mathbb{N}^*$ et dont toutes les classes sont infinies. Trouver un modèle de ces énoncés.
4. Soit maintenant $\mathcal{L}' = \{E_i \mid i < \omega\}$ où chaque E_i est un symbole de relation binaire. Ecrire les énoncés qui disent que chaque E_i est une relation d'équivalence et que la condition suivante est satisfaite : pour tout $i < \omega$, E_{i+1} divise chaque classe de E_i en une infinité de classes. Trouver un modèle de ces énoncés.

IV. *Incidences.*
Nous posons $\mathcal{L} = \{P, L, I\}$, où P et L sont deux symboles de relation unaires et I est un symbole de relation binaire. Intuitivement, P signifiera un "point", L une "ligne" et I une relation d' "incidence" entre les lignes et les points.

1. Ecrire les énoncés $\prod_n$ $(n \in \mathbb{N})$ qui expriment les propriétés suivantes :

$\prod_0$ Il existe un point ; il existe une ligne.
$\prod_1$ Tout élément est un point (P) ou une ligne (L) mais pas tous les deux.
$\prod_2$ L'incidence (I) est une relation symétrique ; quand une paire d'éléments sont incidents, l'un d'entre eux est un point et l'autre est une ligne.
$\prod_{3_n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ Tout(e) point (resp. ligne) est incident(e) avec une infinité de lignes (resp. points).

Déduire de ces énoncés qu'il n'existe pas de "polygones pairs" ; en d'autres termes qu'il n'existe pas de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distincts avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pair tels que $I(x_i, x_{i-1})$ pour tout $i \leq n-1$ et que $I(x_n, x_0)$.

Ecrire maintenant le schéma d'énoncés $\prod_{4_n}$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, qui énoncent la *non* existence des polygones (ou polygones impairs puisque les pairs sont de facto exclus).

2. Vérifier que la structure suivante est un modèle des énoncés $\prod_i$ du point 1 :

univers la base est $\omega^{<\omega}$, les suites finies de nombres naturels ;
points les points sont les suites de longueur paire (y incluse la suite vide de longueur 0) ;
lignes les lignes sont les suites de longueur impaire ;

incidence une suite de longueur $k \in \mathbb{N}$ est incidente avec une suite de longueur $k+1$ si et seulement si elle est le segment initial de celle-ci ;
une suite de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ est incidente avec une suite de longueur $k-1$ si celle-ci est son segment initial ;
une suite n'est incidente avec aucune suite qui ne vérifie pas les deux conditions ci-dessus.

3. Montrer que la théorie du premier ordre formée par les conséquences des énoncés $\prod_i$ a une infinité de modèles dénombrables deux à deux non isomorphes.

V. *Groupes, sous-groupes élémentaires.*
Nous considérons le "langage des groupes", $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$. Soit $\mathcal{G}$ un groupe en tant que $\mathcal{L}$-structure. Nous noterons G son univers.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est simple si et seulement si pour tout $x \in G$ et $y \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que,

$$\mathcal{G} \models x \neq 1 \rightarrow \exists z_1 \ldots z_n (y = (x^{\pm 1})^{z_1} \ldots (x^{\pm 1})^{z_n}).$$

Remarque sur la notation : Pour un groupe arbitraire G et deux éléments $x, y \in G$, la notation x^y veut dire $y^{-1}xy$, en d'autres termes le *conjugué* de x par (ou sous l'action de) y.

2. Montrer que si $\mathcal{G}$ est un groupe simple et que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe élémentaire, en d'autres termes, un sous-groupe de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$, alors $\mathcal{H}$ est simple aussi.

3. Que pouvez-vous conclure pour une extension élémentaire de $\mathcal{G}$?