Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2008/2009
Master 1 | Logique et théorie des ensembles

Devoir 4
(à retourner le 6 mai 2009)

I. *Lemme d'extension commune généralisé.*
Montrer le corollaire 6.2.5 des notes de cours.

II. *Réalisation des types avec paramètres.*
(i) Dans l'exemple 7.2.1 des notes de cours (p. 71), montrer pourquoi les complétés de $p_{+\infty}$ et $p_{-\infty}$ sont uniques.
(ii) Montrer le lemme 7.2.5 des notes de cours.

III. *Isomorphismes, équivalences*
(i) Montrer que la bijection construite dans la preuve du théorème 7.3 des notes de cours est en fait un isomorphisme.
(ii) Montrer le lemme 7.3.7 (i).

IV. *Incidences* (*suite*).
Nous continuons l'exercice IV du DM 3. La notation principale ne changera pas. La $\mathcal{L}$-théorie consistante formée par les énoncés $\prod_i$ et leurs conséquences sera notée $\prod$. Un modèle de $\prod$ sera dit un *pseudoplan*. Le pseudoplan particulier construit dans le DM 3 sera noté $\mathcal{M}$.

1. Montrer que $\prod$ n'est pas *modèle-complète*; en d'autres termes qu'elle possède deux modèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'univers P_1 et P_2 respectivement tels que $\mathcal{P}_1$ soit une sous-structure de $\mathcal{P}_2$ mais que $\mathcal{P}_1$ ne soit pas une sous-structure élémentaire de $\mathcal{P}_2$.

2. La relation d'incidence permet de voir le pseudoplan comme un graphe dont les sommets sont les points ou les lignes. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement s'il y a incidence entre le point et la ligne en question.

Le but de ce point est d'écrire une famille de formules qui définissent la *distance* dans ce graphe. Deux éléments d'un pseudoplan, forcément une ligne et un point, sont dits à distance 1 si et seulement s'ils sont incidents. On le notera $D_1(x, y)$, et ceci équivaut à $I(x, y)$. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, deux éléments d'un pseudoplan seront dits à distance n, noté $D_n(x, y)$, si et seulement s'il existe un chemin entre les deux contenant exactement n arêtes (relations d'incidence). Ecrire les formules qui définissent les relations $D_n(x, y)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que cette notion est uniquement définie, en d'autres termes, si deux éléments d'un pseudoplan sont à distance n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors n est la seule possibilité.

3. Un pseudoplan est dit *connexe* si deux éléments distincts sont toujours à distance finie. Montrer que $\mathcal{M}$ est connexe.

4. Une partie connexe d'un pseudoplan qui est maximale par rapport à cette propriété sera dite *composante connexe*. De manière équivalente, une composante connexe est l'ensemble des éléments à distance finie d'un point fixé du pseudoplan.
(i) Montrer qu'une composante connexe d'un pseudoplan est un pseudoplan.
(ii) Montrer qu'un pseudoplan connexe dénombrable est isomorphe à $\mathcal{M}$.
(iii) Montrer qu'un pseudoplan ω-saturé a une infinité de composantes connexes.

5. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux modèles de $\prod$ d'univers P_1 et P_2 respectivement. Supposons $\mathcal{P}_2$ ω-saturé. Soient $(a_1, \ldots, a_k) \in P_1^k$ et $(b_1, \ldots, b_k) \in P_2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ qui vérifient les conditions suivantes :
(i) pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\mathcal{P}_1 \models P(a_i)$ si et seulement si $\mathcal{P}_2 \models P(b_i)$;
(ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $\mathcal{P}_1 \models a_i = a_j$ si et seulement si $\mathcal{P}_2 \models b_i = b_j$;
(iii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_1 \models D_n(a_i, a_j)$ si et seulement si $\mathcal{P}_2 \models D_n(b_i, b_j)$.
Montrer que pour tout $\alpha \in P_1$, il existe $\beta \in P_2$ tels que $(a_1, \ldots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \ldots, b_k, \beta)$ satisfassent les conditions (i), (ii), (iii).

6. Déduire du point précédent que deux modèles ω-saturés de $\prod$ sont élémentairement équivalents. En déduire que $\prod$ est une théorie complète.

7. Calculer les cardinaux suivants :
(i) $|S_1(\prod)|$;
(ii) $|S_k(\prod)|$ avec $k \geq 2$;
(iii) $|S_1^{\mathcal{P}}(A)|$ avec $\mathcal{P}$ un modèle de $\prod$ et A une partie *finie* de l'univers de $\mathcal{P}$;
(iv) $|S_1^{\mathcal{P}}(A)|$ avec $\mathcal{P}$ un modèle de $\prod$ et A une partie *infinie* et *dénombrable* de l'univers de $\mathcal{P}$.

V. *Extensions élémentaires des groupes.*
Cet exercice est une continuation de l'exercice V du DM 3. Comme dans cet exercice-là, nous travaillerons dans le "langage des groupes", $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$. L'objectif est de montrer qu'une extension élémentaire d'un groupe simple n'est pas nécessairement simple.

Le *groupe alterné infini*, noté $\mathrm{Alt}(\mathbb{N})$, est par définition la limite directe des groupes alternés finis. En effet, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m \leq n$, alors il y a un plongement naturel de $\mathrm{Alt}(m)$ dans $\mathrm{Alt}(n)$ si bien que nous pouvons parler de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{Alt}(n)$. La loi interne de groupe est la composition des permutations. Une caractérisation du groupe $\mathrm{Alt}(\mathbb{N})$ est la suivante : l'ensemble des permutations paires, à supports finis des nombres naturels muni de la composition des fonctions.

1. En utilisant vos connaissances des groupes alternés finis, montrer que $\mathrm{Alt}(\mathbb{N})$ est un groupe simple.

2. En utilisant la caractérisation de l'exercice V du DM 3 et la compacité, montrer que le groupe $\mathrm{Alt}(\mathbb{N})$ a une extension élémentaire qui n'est pas simple.