Devoir 1
28 février 2008

Exercice I
Cet exercice a pour objectif de démontrer que le cardinal de l'ensemble des nombres réels est $2^{\aleph_0}$.

1. Expliciter une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

2. En considérant l'ensemble des décimaux dans l'intervalle $[0,1]$ qui ne font intervenir que des 0 et des 1 dans leurs parties décimales, montrer que $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$.

3. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application qui associe à r, le sous-ensemble

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \geq r\}$$

des rationnels est une injection de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Conclure.

Exercice II

1. Montrer directement, sans utiliser le théorème 2.1 des notes du cours, que le lemme de Zorn implique le principe du bon ordre.

2. On définit un ensemble non dénombrable de la façon suivante :

Définition: Un ensemble E est dit non dénombrable s'il n'existe pas de bijection de E vers $\aleph_0$.

Montrer, explicitant les recours à l'Axiome du choix, que si E est infini et non dénombrable alors E a une partie de cardinal $\aleph_1$. Toute utilisation du théorème de récursion transfinie devra être présentée dans le formalisme utilisé en cours.

3. Montrer que l'Axiome du choix découle de l'énoncé suivant : pour toute paire d'ensembles A et B, soit $|A| \leq |B|$, soit $|B| \leq |A|$.

Exercice III
Cet exercice a pour but d'étudier divers aspects de l'arithmétique des ordinaux.

1. Montrer que si α et β sont des ordinaux dénombrables ou finis alors il en est de même pour $\alpha + \beta$, $\alpha.\beta$ et α^β.

2. Trouver dans chacun des trois cas suivants le plus petit ordinal α qui satisfait l'équation donnée :

   1. $\omega + \alpha = \alpha$
   2. $\omega.\alpha = \alpha$ et $\alpha \neq 0$.
   3. $\omega^\alpha = \alpha$

3. Dans le point (2), vérifier que dans chaque équation α est dénombrable.