Devoir 2
6 mars 2008

Exercice I Dans cet exercice on considère un cardinal singulier κ, et on suppose qu'il existe des cardinaux $\lambda_0 < \kappa$ et γ tels que :

$$\forall\lambda \ \big(\lambda_0 \leq \lambda < \kappa\big) \Rightarrow 2^\lambda = \gamma$$

Le but de l'exercice est de prouver qu'on doit alors avoir $2^\kappa = \gamma$.
(a) Montrer qu'il existe un cardinal ρ tel que $\lambda_0 \leq \rho < \kappa$ et une famille de *cardinaux* $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\rho}$ tels que

$$\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \colon \alpha < \rho\}\ .$$

(b) Pour $f \in 2^\kappa$ et $\alpha < \rho$, on appelle f^α la restriction de f à κ_α. Montrer que $f \mapsto (f^\alpha)_{\alpha<\rho}$ est une injection de 2^κ dans $\prod_{\alpha<\rho} 2^{\kappa_\alpha}$.
(c) Conclure.

Exercice II On souhaite démontrer l'égalité suivante :

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}.2^{\aleph_1} \tag{1}$$

(a) En utilisant une méthode similaire à celle de I(b), prouver que :

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} \leq \prod_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1}\ .$$

(b) Montrer que l'égalité (1) est vraie.
Indication. On pensera à utiliser la formule de Hausdorff (qui a été démontrée en TD).

Exercice III Soit κ un cardinal non dénombrable régulier. L'objectif de cet exercice est de vérifier certaines propriétés élémentaires des clubs et des ensembles stationnaires sur κ.

1. Montrer que l'ensemble $\{\alpha < \kappa | \alpha \text{ est un ordinal limite}\}$ est un club.
2. Montrer que pour tout $\alpha < \kappa$, l'ensemble $\{\beta < \kappa | \alpha \leq \beta\}$ est un club.
3. Montrer que tout club est un ensemble stationnaire.
4. Montrer que tout ensemble stationnaire sur κ est de cardinal κ.
5. Montrer que si S est stationnaire et que C est un club alors $S \cap C$ est stationnaire.

Exercice IV Dans cet exercice nous verrons un exemple important d'ensemble stationnaire. Pour préparer le terrain, on commencera par une question intermédiaire dont vous avez vu des analogues en td.

(1) Soit α un ordinal limite non nul. Soit

$$\beta_0 \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_i \ldots,\ (i < \gamma)$$

une suite croissante d'ordinaux dans α dont la borne supérieure est α. Montrer que $\mathrm{cof}(\gamma) = \mathrm{cof}(\alpha)$.

(2) Soit λ un cardinal régulier non nul strictement inférieur à κ. Montrer que l'ensemble $E^\kappa_\lambda = \{\alpha < \kappa | \mathrm{cof}(\alpha) = \lambda\}$ est stationnaire.