Devoir 3
13 mars 2008

Exercice I Soit κ un cardinal non dénombrable régulier. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe 2^κ ordres linéaires denses et sans extrémités deux à deux non isomorphes et de cardinal κ. Ce but s'atteindra en associant à chaque $X \in \mathcal{P}(\kappa)$ un ordre linéaire dense et sans extrémités $D(X)$ tel que $D(X) \cong D(Y)$ si et seulement si $X = Y$. Le fait suivant sera admis :

Fait : κ est l'union deux à deux disjointe de κ ensembles stationnaires.

On notera $\{S_\beta | \beta \in \kappa\}$ les sous-ensembles stationnaires de κ fournis par le fait. On définit par récurrence transfinie une suite $D_i(X)$ $(i \in \kappa)$:

$$\begin{aligned} D_0(X) &= \mathbb{Q}. \\ D_\lambda(X) &= \bigcup_{i\in\lambda} D_i(X) \text{ si } \lambda \text{ est un ordinal limite.} \\ D_{\alpha+1}(X) &= \begin{cases} D_\alpha(X) \sqcup [2,+\infty[& \text{si } \alpha \in \bigsqcup_{\beta\in X} S_\beta \\ D_\alpha(X) \sqcup]2,+\infty[& \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion, soulignons que les intervalles $[2, +\infty[$ et $]2, +\infty[$ sont des intervalles dans $\mathbb{Q}$.

1. *Montrer par récurrence que* $|D_\alpha(X)| \leq |\alpha + \omega|$.

On pose $D(X) = \bigcup_{\alpha<\kappa} D_\alpha(X)$. L'ordre $\prec$ est défini sur $D(X)$ par récurrence transfinie, et sans surprise. Si $\alpha = 0$ alors l'ordre dense est celui de $\mathbb{Q}$; pour α limite mais non nul, si $x, y \in D_\alpha(X)$ alors il existe $\gamma < \lambda$ tel que $x, y \in D_\gamma(X)$. Par récurrence sur $D_\gamma(X)$, la relation d'ordre $\prec$ est définie. Pour $D_{\alpha+1}(X)$, tout élément du nouveau segment ajouté est strictement supérieur à tout élément de $D_\alpha(X)$, et l'extension de l'ordre au nouveau segment se fait en utilisant l'ordre des rationnels.

Intuitivement, il s'agit de remplacer chaque ordinal dans κ par une copie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Q}_+$ muni chacun de son ordre usuel.

2.*Montrer que la construction ci-dessus aboutit à un ordre linéaire, dense et sans extrémités de cardinal* κ.

A partir de maintenant, on supposera par l'absurde que $X \neq Y$ sont deux parties distinctes dans κ telles que $D(X) \cong D(Y)$ par le biais d'un isomorphisme f.

3. Montrer que $C = \{\alpha \in \kappa | f(D_\alpha(X)) = D_\alpha(Y)\}$ *est un club.*

Indication : Pour montrer que C n'est pas borné, fixez $\beta \in \kappa$ et commencez à construire une suite croissante à partir d'un α_0 quelconque strictement supérieur à β. Montrez qu'il existe $\alpha_1 > \alpha_0$ tel que $f(D_{\alpha_0}(X))$ soit strictement contenu dans $D_{\alpha_1}(Y)$. Trouvez de la même manière $\alpha_2 > \alpha_1$ tel que $f^{-1}(D_{\alpha_1}(Y))$ soit strictement contenu dans $D_{\alpha_2}(X)$...

4. Sans perte de généralité on choisit $\beta \in X \setminus Y$. *Or* S_β *est stationnaire. Alors, soit* $\alpha \in S_\beta \cap C$*.Par construction,* $f(D_\alpha(X)) = D_\alpha(Y)$*. En comparant* $D_\alpha(X)$ *dans* $D(X)$ *à* $D_\alpha(Y)$ *dans* $D(Y)$*, arrivez à une contradiction.*