Devoir 4
20 mars 2008

Exercice I On considère le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est un symbole de relation binaire.

1. Ecrire les énoncés qui disent que R est une relation d'équivalence qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a exactement une classe contenant n éléments.
2. Expliciter un modèle des énoncés du premier point.

Nous noterons T la théorie formée par les conséquences des énoncés du premier point.

3. Expliciter deux modèles dénombrables et isomorphes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de T tels que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais qu'elle ne la soit pas élémentairement.
4. Expliciter un modèle dénombrable de T qui a exactement une classe infinie d'équivalence. Expliciter un modèle dénombrable de T qui a une infinité de classes infinies.

Exercice II Soit $\mathcal{L} = \{+, ., {}^{-1}, -, 0, 1\}$ le langage du premier ordre avec deux symboles de fonctions binaires $+$, $.$, deux symboles de fonctions unaires $-$, ${}^{-1}$ et deux symboles de constantes 0, 1. Décrire l'ensemble des énoncés qui disent

"je suis un corps algébriquement clos de caractéristique p".

Dans cet exercice les possibilités pour p incluent 0.

Exercice III Démontrer les lemmes 5.7.6, 5.7.8 et 5.7.9 des notes de cours.