Devoir 5
27 mars 2008

Exercice I Soient T une théorie et σ un énoncé qui est vrai dans tous les modèles infinis de cette théorie. Montrer qu'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{N}$ tel que σ soit vrai dans tous les modèles de T qui ont au moins k éléments.

Exercice II Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie d'univers A. La structure $\mathcal{A}$ sera dit *minimale* si elle vérifie la propriété suivante :

Soit $\mathcal{L}(A)$ le langage élargi en ajoutant un symbole de constante pour nommer chaque élément de $\mathcal{A}$. Pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ à $k+1$ variables libres ($k \in \mathbb{N}$), pour tout k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ de symboles de constantes nommant k éléments de A, l'ensemble des éléments de A qui satisfont $\phi(x, a_1, \ldots, a_k)$ dans $(\mathcal{A}, a)_{a \in A}$ est soit fini soit cofini (son complémentaire est fini).

Montrer que toute extension élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est minimale par rapport au langage $\mathcal{L}(B)$ obtenu en ajoutant un symbole de constante pour chaque élément de l'univers B de $\mathcal{B}$ si et seulement s'il existe un nombre naturel b_ϕ qui ne dépend que de la $\mathcal{L}$-formule $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ telle que

$$\mathcal{A} \models \forall y_1 \ldots y_k (\exists^{\leq b_\phi} x \phi(x, y_1, \ldots, y_k) \vee \exists^{\leq b_\phi} x \neg \phi(x, y_1, \ldots, y_k)) \quad .$$

Notons que $\exists^{\leq c}$ est une abbréviation pour la propriété (qui s'exprime en premier ordre) “il existe au plus c”.

Exercice III Soit $\mathcal{M}$ une structure dont la signature contient une famille $(f_i)_{i \in I}$ non vide de fonctions. Nous dirons que $\mathcal{M}$ est de type fini s'il existe une partie finie $M_0 \subset M$ de $\mathcal{M}$ telle que tout élément de M s'écrive comme l'image d'une partie de M_0 sous l'action d'un terme. Montrer que $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire qui n'est pas de type fini.