Devoir 6
3 avril 2008

Exercice I Nous reprenons le contexte de l'exercice I du devoir 4. Il s'agit du langage $\mathcal{L} = \{R\}$ avec R un symbole de relation binaire qui nomme une relation d'équivalence à une classe et une seule de cardinal n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ comme le dit la théorie T de cet exercice.

1. Ecrire pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la formule du premier ordre $C_n(x)$, à une seule variable libre, qui dit "j'appartiens à une classe à n éléments". Rappelons que dans notre cas particulier, ceci équivaut à dire "j'appartiens à la classe à n éléments."

2. Montrer que chaque modèle de T a une extension élémentaire qui contient une infinité de classes infinies. *Une telle extension sera dite "riche" suivant l'esprit de vos travaux dirigés.*

3. Notre objectif final est de vérifier la complétude de T en utilisant la méthode du va-et-vient. Pour la mettre en place, montrer l'énoncé suivant :

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T d'univers M et N respectivement. On suppose $\mathcal{N}$ riche. Soient $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ et $(b_1, \ldots, b_k) \in N^k$ tels que

(i) pour tout $1 \leq i, j \leq k$, $a_i = a_j$ si et seulement si $b_i = b_j$;
(ii) pour tout $1 \leq i, j \leq k$, $\mathcal{M} \models R[(a_i, a_j)]$ si et seulement si $\mathcal{N} \models R[(b_i, b_j)]$;
(iii) pour tout $1 \leq i \leq k$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M} \models C_n[a_i]$ si et seulement si $\mathcal{N} \models C_n[b_i]$.

Alors pour tout $\alpha \in M$, il existe $\beta \in N$ tel que $(a_1, \ldots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \ldots, b_k, \beta)$ satisfassent les mêmes conditions (i), (ii) et (iii).

4. Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ comme dans le point précédent. Si $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ est une formule telle que $\mathcal{M} \models \phi[(a_1, \ldots, a_k)]$, alors $\mathcal{N} \models \phi[(b_1, \ldots, b_k)]$.

5. Déduire du point 4 que T est une théorie complète.

6. Nous augmentons le langage $\mathcal{L}$ en posant $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{C_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. En d'autres termes, nous ajoutons au langage un symbole de relation unaire pour chaque formule décrivant l'appartenance à la classe à n éléments. Montrer que dans ce langage, pour toute formule $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ à exactement k variables libres avec $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une formule du premier ordre sans quantificateurs $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ avec les mêmes variables libres telle que

$$T \vdash \forall x_1 \ldots x_k(\phi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_k)) \ .$$

Déduire de ce qui précède que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux modèles de T tels que $\mathcal{A}$ soit une sous-structure de $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.