Devoir 7
24 avril 2008

Exercice I Démontrer en fournissant les détails manquants (presque tout) le théorème 7.3 et le lemme 7.3.5 (1) du cours.

Exercice II Soient $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie complète dans $\mathcal{L}$ dont les modèles sont infinies. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de cardinal supérieur ou égal à κ et $A \subset M$ une partie de M de cardinal κ. Montrer que si $|S_1^{\mathcal{M}}(A)| = \kappa$, alors il en est de même pour $|S_k^{\mathcal{M}}(A)|$, ($k \in \mathbb{N}^*$).

Exercice III Nous reprenons le contexte du langage $\mathcal{L} = \{R\}$ avec R un symbole de relation binaire qui nomme une relation d'équivalence à une classe et une seule de cardinal n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans les devoirs 4 et 6, plusieurs propriétés de la théorie T qui impose ces conditions ont été étudiées. Cet exercice a pour objectif de continuer l'étude de T en se basant sur les connaissances déjà acquises.

1. Nous commençons par une question qui est presque une répétition de certaines questions du devoir 6 : montrer qu'un modèle de T est ω-saturé si et seulement si ce modèle a une infinité de classes d'équivalence infinies.

Dans le reste de l'exercice nous noterons $\mathcal{M}$ un modèle de T (en fait unique à isomorphisme près) qui ne contient que des classes finies. Sa base sera notée M. Comme au devoir 6, nous notons $C_i(x)$ la formule du premier ordre à une seule variable libre qui exprime "j'appartiens à une classe à i éléments".

2. Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ avec base N. Soit $\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ une formule à paramètres avec $c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}$ qui nomment $a_1, \ldots, a_k \in N$ respectivement. En d'autres termes $\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ est une $\mathcal{L}(\{a_1, \ldots, a_k\})$-formule. Montrer que l'ensemble définissable

$$\phi(N; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) = \{x \in N \mid \mathcal{N} \models \phi[(x, a_1, \ldots, a_k)]\}$$

coupe un nombre fini ou cofini de classes d'équivalence finies. En d'autres termes, montrer que l'ensemble

$$I_{\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})} = \{i \in \mathbb{N}^* : (\mathcal{N}, a_1, \ldots, a_k) \models \exists x(\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) \wedge C_i(x))\}$$

est fini ou cofini. En déduire que tout sous-ensemble définissable de M est fini ou cofini. Dans la terminologie du devoir 5, $\mathcal{M}$ est une structure minimale.

3. Soient $\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ et $\mathcal{N}$ comme au point 2. Montrer que l'ensemble définissable $\phi(N; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ coupe un nombre fini ou cofini de classes d'équivalence infinies.

Notons que les points 2 et 3 donnent une description assez complète des sous-ensembles définissables de la base d'un modèle de T. C'est une connaissance importante pour comprendre T mieux, et nous avons considérablement utilisé les modèles ω-saturés pour y arriver.

4. Nous avons montré que $\mathcal{M}$ est minimale. Donner un exemple d'extension élémentaire de $\mathcal{M}$ qui n'est pas minimale.

En théorie des modèles une structure minimale dont toutes les extensions élémentaires sont minimales est dite fortement minimale. *Dans notre cas, $\mathcal{M}$ est minimale mais non fortement.*

Donner un exemple de formule qui contredit le critère de minimalité forte du DM 5.

5. (i) Maintenant nous "compterons les types". Commençons par $\emptyset$. Montrer que $|S_k(T)| = \aleph_0$.

(ii) Soient $\mathcal{N}$ comme dans les points précédents et A une partie finie de N. Déduire de (i) que $|S_k^{\mathcal{N}}(A)| = \aleph_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Maintenant soit $A \subset N$ une partie dénombrable de N. Montrer que $|S_1^{\mathcal{N}}(A)| = \aleph_0$. L'exercice II permet d'en déduire $|S_k^{\mathcal{N}}(A)|$.

T est l'exemple d'une théorie ω-stable, une classe de théories du premier ordre très particulière et importante. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est un autre exemple mais avec des propriété modèle théoriques bien différentes que nous étudierons prochainement.