Devoir 8
6 mai 2008

Exercice I L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'une théorie fortement minimale dans un langage dénombrable est κ-catégorique pour tout cardinal non dénombrable κ. La preuve fait intervenir deux notions fondamentales en théorie des modèles : les *ensembles fortement minimaux* et la *clôture algébrique*.

Avant d'aborder les diverses étapes, nous remarquons que dans cet exercice, nous allégerons notre notation usuelle et ne ferons pas de distinction entre les symboles de constantes et leurs interprétations dans une structure.

Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie d'univers M.

Définition 1 :
(a) *Soient $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ une $\mathcal{L}$-formule à exactement $k+1$ variables libres ($k \in \mathbb{N}$) et $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$. L'ensemble définissable $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k)$ est dit* minimal *si $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k)$ est un ensemble infini et pour tout l-uple $(b_1, \ldots, b_l) \in M^l$ éventuellement vide et pour toute $\mathcal{L}$-formule $\psi(x, y_1, \ldots, y_l)$ à exactement $l+1$ variables libres ($i \in \mathbb{N}$),*
soit $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k) \cap \psi(\mathcal{M}, b_1, \ldots, b_l)$ est une partie finie de M ;
soit $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k) \cap \neg\psi(\mathcal{M}, b_1, \ldots, b_l)$ en est une partie finie.
(b) *L'ensemble définissable $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k)$ est dit* fortement minimal *si $\phi(\mathcal{M}', a_1, \ldots, a_k)$ est minimal pour toute extension élémentaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$.*

1. Montrer la caractérisation analogue à celle du dm 5 :
Un ensemble $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k)$ est fortement minimal si et seulement si pour tout $\mathcal{L}$-formule $\psi(x, y_1, \ldots, y_l)$ à exactement $l+1$ variables libres ($l \in \mathbb{N}$), il existe $n_\psi \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{M} \models \forall y_1 \ldots y_l (\exists^{\leq n_\psi} x(\phi(x, a_1, \ldots, a_k) \wedge \psi(x, y_1, \ldots, y_l)) \vee \exists^{\leq n_\psi} x(\phi(x, a_1, \ldots, a_k) \wedge \neg\psi(x, y_1, \ldots, y_l)))$$

2. Montrer que la théorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est fortement minimale au sens du cours si et seulement si la partie de M définie par la formule $x = x$, en d'autres termes M, est fortement minimale par rapport à un modèle de $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Définition 2 : *Soit $A \subset M$. Un élément $m \in M$ est dit* algébrique *sur A s'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x, y_1, \ldots, y_k)$ à exactement $k+1$ variables libres ($k \in \mathbb{N}$), un k-uple $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ éventuellement vide tels que l'ensemble $\phi(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k)$ soit fini et que $\mathcal{M} \models \phi(m, a_1, \ldots, a_k)$. On écrit alors $m \in \mathrm{acl}(A)$. La* clôture algébrique *de A, notée $\mathrm{acl}(A)$ est l'ensemble des éléments de M algébriques sur A.*

Remarque sur la notation allégée dans la définition 2 : L'écriture $\mathcal{M} \models \phi(m, a_1, \ldots, a_k)$ exprime le même fait que $\mathcal{M} \models \phi[(m, a_1, \ldots, a_k)]$ ou encore $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_k) \models \phi([m], c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ si on se place dans le $\mathcal{L}(A)$-langage en ajoutant les symboles de constante $\{c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}\}$ au langage $\mathcal{L}$.

3. (i) Montrer que $\mathrm{acl}(A)$ ne dépend pas du modèle de $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ qui contient A.
(ii) Montrer que $|\mathrm{acl}(A)| \leq |A| + \aleph_0$.

4. Montrer les propriétés suivantes :
(i) $A \subset \mathrm{acl}(A)$.
(ii) Si $A \subset B \subset M$, alors $\mathrm{acl}(A) \subset \mathrm{acl}(B)$.
(iii) $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.
(iv) Si $a \in \mathrm{acl}(A)$ alors il existe une partie finie A_0 de A telle que $a \in \mathrm{acl}(A_0)$.

5. Maintenant on suppose que $A \cup B \cup \{e\} \cup \{f\} \subset \phi(\mathcal{M}, m_1, \ldots, m_k)$ où $\phi(\mathcal{M}, m_1, \ldots, m_k)$ est un ensemble fortement minimal. Montrer que si $e \in \mathrm{acl}(A \cup \{f\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$ alors $f \in \mathrm{acl}(A \cup \{e\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$. Vous pouvez suivre la feuille de route suivante ou proposer une autre solution :

(i) Faire d'abord la tache facile : montrer que $f \notin \mathrm{acl}(A)$.

(ii) Soit $\psi(x, y)$ une $\mathcal{L}(A)$-formule telle que $\psi(x, f)$ soit satisfaite par exactement k élements dans $\mathcal{M}$ dont e. On pose

$$\theta(y, e) = \phi(y) \wedge \psi(e, y) \wedge \exists^{=k} z \psi(z, y) \ ,$$

où $\exists^{=k}$ veut dire "il existe exactement k", ce qui est une condition du premier ordre. L'objectif est de montrer que $\theta(\mathcal{M}, e)$ est fini. On procède par l'absurde.

Déduire de l'hypothèse que $\theta(\mathcal{M}, e)$ est cofini et que cette conclusion s'exprime par une $\mathcal{L}(A)$-formule du premier ordre satisfaite par e.

(iii) Montrer que la formule déterminée dans (ii) définit une partie cofinie de M. Utiliser cette conclusion pour arriver à une contradiction.

Définition 3 : Soit $E = \phi(\mathcal{M}, m_1, \ldots, m_k)$ un ensemble fortement minimal. Une partie B de E est dite *indépendante* si pour tout $e \in B$, $e \notin \mathrm{acl}(B \setminus \{e\})$. L'ensemble B est dit une *base* s'il est indépendant et $\mathrm{acl}(B) = E$.

6. (i) Montrer que si $E = \phi(\mathcal{M}, m_1, \ldots, m_k)$ est un ensemble fortement minimal, alors E a une base (*Indication : penser aux espaces vectoriels*).

(ii) Si B_1 et B_2 sont deux bases pour un ensemble fortement minimal alors montrer que $|B_1| = |B_2|$ (*Indication : vous pouvez considérer trois cas : B_1 est de cardinal non dénombrable ; il est de cardinal $\aleph_0$; il est fini.*). Le cardinal d'une base d'un ensemble fortement minimal sera dit la *dimension* de cet ensemble.

7. Un *type* $p(x) \in S_1^{\mathcal{M}}(A)$ est dit *algébrique sur* A si toute réalisation de p appartient à $\mathrm{acl}(A)$. Vérifier que si p est algébrique alors il existe une $\mathcal{L}(A)$-formule $\psi(x)$ dans p telle que

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \vdash \forall x(\psi(x) \rightarrow \theta(x)) \ ,$$

pour toute $\mathcal{L}(A)$-formule $\theta(x)$ dans p. Un tel type p est dit *isolé par* $\psi(x)$. En effet, p est un point isolé au sens topologique aussi.

8. Posons $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Supposons que T soit fortement minimal, et considérons deux modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ d'univers M_1 et M_2 respectivement tels que M_1 et M_2 soient de même dimension κ. Soient $B_1 = \{e_i \mid i < \kappa\}$ et $B_2 = \{f_i \mid i < \kappa\}$ des bases de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ respectivement.

(i) Montrer que si $\nu_0 : B_1 \longrightarrow B_2$ est une bijection alors pour toute $\mathcal{L}$ formule $\theta(x_1, \ldots, x_k)$ à k variables libres $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ($k \in \mathbb{N}$), et $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$

$$\mathcal{M}_1 \models \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \text{ si et seulement si } \mathcal{M}_2 \models \theta(\nu_0(e_{i_1}), \ldots, \nu_0(e_{i_k})) \ .$$

(ii) En utilisant la question 7, montrer que ν_0 s'étend à un isomorphisme entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

(iii) Déduire du point précédent qu'une théorie dénombrable fortement minimale est catégorique en tous les cardinaux non dénombrables.