V. *Une jolie conséquence du théorème de Fodor.*
Ôn définit $E^\kappa_\omega = \{\alpha < \kappa \colon \mathrm{cof}(\alpha) = \omega\}$. Rappelons que vous avez démontré en DM que E^κ_ω est stationnaire. Le but de l'exercice est de montrer que tout sous-ensemble stationnaire de E^κ_ω peut s'écrire comme la réunion de κ ensembles stationnaires disjoints. Pour tout $\alpha \in E^\kappa_\omega$, on commence par fixer une suite strictement croissante $(a^\alpha_n)_{n\in\omega}$ telle que $\sup\{a^\alpha_n \colon n \in \omega\} = \alpha$. Fixons maintenant un sous-ensemble stationnaire W de E^κ_ω.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que pour tout $\eta < \kappa$ l'ensemble $\{\alpha \in W \colon \eta \leq a^\alpha_n\}$ soit stationnaire.

(b) On fixe un des entiers n dont on a démontré l'existence au (a), et on considère la fonction $f \colon W \to \kappa$ définie par $f(\alpha) = a^\alpha_n$. En appliquant le lemme de Fodor, trouver κ ensembles stationnaires disjoints dont la réunion soit égale à W.

(c) Montrer que κ est la réunion de κ sous-ensembles stationnaires disjoints.

Correction.

(a) On raisonne par l'absurde; supposons que pour tout $n < \omega$ il existe $\eta_n < \kappa$ tel que l'ensemble $\{\alpha \in W \colon \eta_n \leq a^\alpha_n\}$ ne soit pas stationnaire. Par définition d'un ensemble stationnaire, cela signifie que pour tout n il existe un club C_n tel que pour tout $\alpha \in W \cap C_n$ on ait $a^\alpha_n < \eta_n$. Considérons alors $C = \bigcap_{n<\omega} C_n$: C est un club, et pour tout $\alpha \in W \cap C$ et tout $n < \omega$ on a $a^\alpha_n < \eta_n$. Posons $\eta = \sup\{\eta_n \colon n < \omega\}$; pour tout $\alpha \in W \cap C$ on a $\alpha = \sup\{a^\alpha_n \colon n < \omega\} \leq \eta$. Par conséquent, $W \cap C$ est borné, ce qui est absurde puisque $W \cap C$ est stationnaire (intersection d'un club et d'un ensemble stationnaire) et donc en particulier non borné.

(b) La fonction f est régressive sur chaque ensemble $W_\eta = \{\alpha \in W \colon \eta \leq a^\alpha_n\}$ (pour tout $\eta < \kappa$) : on a $f(\alpha) = a^\alpha_n < \alpha$ pour tout $\alpha \in W$. comme chaque W_η est stationnaire, le lemme de Fodor nous donne pour tout $\eta < \kappa$ un ordinal $\gamma_\eta < \kappa$ tel que $\{\alpha \in W_\eta \colon f(\alpha) = \gamma_\eta\}$ soit stationnaire. Posons $S_\eta = \{\alpha \in W \colon f(\alpha) = \gamma_\eta\}$. Les S_η sont tous stationnaires, et on a par définition, pour tout $\eta, \eta' < \kappa$, que $S_\eta = S_{\eta'}$ ou $S_\eta \cap S_{\eta'} = \emptyset$. Avant de conclure, remarquons que l'on a par définition $\gamma_\eta \geq \eta$ pour tout $\eta < \kappa$, donc $\sup\{\gamma_\eta \colon \eta < \kappa\} = \kappa$; par consnséquent $|\{\gamma_\eta \colon \eta < \kappa\}| = \kappa$ (rappelons que κ est régulier). D'un autre côté, il est clair d'après la définition que $|\{S_\eta \colon \eta < \kappa\}| = |\{\gamma_\eta \colon \eta < \kappa\}|$ et que E^κ_ω est la réunion des S_γ. On a donc bien construit κ ensembles stationnaires disjoints dont la réunion est égale à E^κ_ω.

(c) On a $E^\kappa_\omega = \sqcup_{\gamma<\kappa} S_\gamma$, où chaque S_γ est stationnaire. Posons simplement $T_0 = S_0 \cup (\kappa \setminus E^\kappa_\omega)$, et $T_\gamma = S_\gamma$ pour tout $\gamma > 0$. Alors tous les T_γ sont stationnaires, et $\kappa = \sqcup_{\gamma<\kappa} T_\gamma$.

VI. *Un lemme de Solovay...*
Soit $S \subset \kappa$ un ensemble stationnaire tel que tout $\alpha \in S$ est un cardinal non dénombrable et régulier. On veut montrer que l'ensemble $T = \{\alpha \in S \colon S \cap \alpha$ n'est pas un sous-ensemble stationnaire de $\alpha\}$ est stationnaire. Pour cela, on procède en trois étapes.

(a) Si $C \subset \kappa$ est un club , on appelle C' l'ensemble des ordinaux qui sont des limites d'ordinaux de C. Montrer que $C' \subset C$, que C' est un club, et que $S \cap C' \neq \emptyset$.

(b) Soit α le plus petit élément de $S \cap C'$. En utlisant le fait que α est régulier, montrer que $C \cap \alpha$ est un club dans α, ainsi que $C' \cap \alpha$.

(c) Montrer que $S \cap \alpha$ n'est pas stationnaire dans α. Conclure.

Correction.

(a) Une limite d'éléments de C appartient à C, donc il est clair que $C' \subset C$. Pour voir que C' est un club, il nous faut vérifier deux choses :

C' est fermé : Soit $\lambda < \kappa$ et une suite $(\alpha_\xi)_{\xi<\lambda}$ une suite strictement croissante d'éléments de C'. Alors $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \colon \xi < \lambda\}$ appartient à C (puisque chaque α_ξ est dans C et C est un club), et α est une limite d'ordinaux de C (les α_ξ), par conséquent $\alpha \in C'$.

C' est non borné : Soit $\alpha < \kappa$. Comme C est non borné, il existe $\alpha_0 \in C$ tel que $\alpha_0 > C$. De même il existe $\alpha_1 \in C$ tel que $\alpha_1 > \alpha_0$. Par récurrence, on construit une suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n<\omega}$ d'éléments de C, tous strictement supérieurs à α. Le sup β de cette suite appartient à C', et $\beta > \alpha$. Ceci prouve que C' est non borné.

(b) Comme α est dans C', on sait qu'il existe un ordinal limite λ et une suite strictement croissante $(\alpha_\xi)_{\xi<\lambda}$ tels que $\alpha = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \lambda\}$. Ceci prouve que $C \cap \alpha$ est non borné dans α. De plus il est clair, comme C est fermé, que $C \cap \alpha$ est fermé dans α : une suite strictement croissante d'éléments de $C \cap \alpha$ est en particulier une suite d'éléments de C, donc son sup est dans C, par conséquent si ce sup est strictement inférieur à α alors il appartient à $C \cap \alpha$. Pour la même raison on voit que $C' \cap \alpha$ est fermé dans α. Il reste à vérifier que $C' \cap \alpha$ est non borné dans α, et c'est là qu'on utilise le fait que α est régulier et non dénombrable : soit $\beta < \alpha$. Comme $C \cap \alpha$ est un club dans α, on peut comme au (a) construire une suite $(\beta_n)_{n<\omega}$ d'éléments de $C \cap \alpha$ tels que $\beta < \beta_0$ (et donc $\beta < \beta_n$ pour tout $n < \omega$). Alors $\gamma = \sup\{\beta_n : n < \omega\}$ appartient à C', et est strictement inférieur à α puique α est un cardinal régulier non dénombrable. Ceci finit la démonstration du fait que $C' \cap \alpha$ est un club dans α.

(c) Par définition de α on a $S \cap (C' \cap \alpha) = (S \cap C') \cap \alpha = \emptyset$. Or on a vu que $C' \cap \alpha$ est un club dans α, donc $S \cap \alpha$ n'est pas stationnaire dans α. En reprenant les notations de l'exercice, on a donc $\alpha \in C \cap T$. Comme le club C était quelconque, ceci prouve que $T \cap C$ est non vide pour tout club C, autrement dit que T est un ensemble stationnaire.