Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2007/2008
Master 1 | Logique et théorie des ensembles

Théorie des modèles
Feuille 7

I. Dans cet exercice le langage $\mathcal{L}$ consiste du seul symbole $<$.

1. Ecrire les énoncés qui disent que $<$ est une relation d'ordre total, discrète (un successeur et un prédécesseur sauf au premier rang), sans borne supérieure, et avec un plus petit élément.

2. (i) Montrer que l'ordinal ω muni de son bon ordre est un modèle des énoncés du premier point.
Dans la suite T sera l'ensemble des conséquences des énoncés du premier point.
(ii) Expliciter une paire de modeles de T, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ isomorphes et dénombrables tels que $\mathcal{P}$ soit une sous-structure de $\mathcal{Q}$ non élémentaire.
(iii) Vérifier que $\mathcal{S} = (\omega \sqcup \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}; <^{\mathcal{S}})$ est un modèle de T où $<$ est interprété de la façon suivante : tout élément de ω est inférieur à tout élément de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$; la restriction de $<^{\mathcal{S}}$ à $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ est l'ordre lexicographique

$$(q_1, z_1) <^{\mathcal{S}} (q_2, z_2) \text{ si et seulement si } q_1 < q_2 \text{ ou } (q_1 = q_2 \text{ et } z_1 < z_2)$$

où $<$ est l'ordre usuel des nombres rationnels.

3. Montrer que chaque modèle $\mathcal{P}$ de T a une extension élémentaire $\mathcal{Q}$ de même cardinal que $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{Q}$ contienne une copie isomorphe à $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ ordonné comme au point 2. (iii).

4. Maintenant nous introduirons une notion de distance définissable dans notre théorie. On fait les définitions suivantes :

1. $d_0(x_1, x_2)$ si et seulement si $x_1 = x_2$;
2. $d_1(x_1, x_2)$ si et seulement si x_1 est un successeur de x_2 ou x_2 est un successeur x_1 ;
3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $d_{i+1}(x_1, x_2)$ si et seulement s'il existe exactement i éléments entre x_1 et x_2 ;
4. $d_\infty(x_1, x_2)$ si et seulement s'il existe une infinité d'éléments entre x_1 et x_2.

(i) Expliciter des définitions du premier ordre pour les deuxième et troisième définitions.
(ii) Montrer qu'il n'existe pas de formule du premier ordre qui définit la relation d_∞ ; expliciter un ensemble infini de formules du premier ordre qui "définit" cette relation.
Introduisons aussi les relations unaires suivantes : pour tout $k < \omega$ ou $k = \infty$, $d_k^\circ(x)$ si et seulement si $d_k(0, x)$ où 0 est utilisé pour noter le plus petit élément.
(iii) Pour tout $k < \omega$ expliciter une formule du premier ordre qui définit d_k°. Montrer qu'il n'existe pas de formule du premier ordre qui définit d_∞°.

Nous utiliserons les notations d_i et d_i° ($i < \omega$) pour abbrévier les formules du premier ordre qui définissent ces propriétés.

Nous utiliserons le mot "riche" pour les extensions élémentaires ayant la propriété mentionnée au point 3.

5. Maintenant, on va faire un peu de va-et-vient. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles dont $\mathcal{N}$ est riche. Fixons $k \in \mathbb{N}$, supposons que $(a_1, \dots, a_k)$ et $(b_1, \dots, b_k)$ soient deux k-uplets extraits de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement soumis aux conditions suivantes : pour tout naturel $k < \omega$ et toute paire $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ telle que $1 \leq i, j \leq k$

1. $a_i < a_j$ si et seulement si $b_i < b_j$;
2. $a_i = a_j$ si et seulement si $b_i = b_j$;
3. pour tout $l < \omega$, $\mathcal{M} \models d_l^\circ(a_i)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models d_l^\circ(b_i)$;
4. pour tout $l < \omega$, $\mathcal{M} \models d_l(a_i, a_j)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models d_l(a_i, a_j)$.

Montrer que si $\alpha \in M$ est arbitrairement choisi alors il existe $\beta \in N$ tel que $(a_1, \dots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \dots, b_k, \beta)$ satisfassent les mêmes conditions.

6. Déduire du point (5) par une récurrence sur la complexité des formules que deux modèles riches de cardinaux arbitraires sont élémentairement équivalents. Conclure que T est une théorie complète.

7. Augmentons le langage en posant $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{d_i^\circ, d_i | i < \omega\}$ où les nouveaux symboles nomment les relations de même nom définies dans le point (4). Nous considérons T dans ce langage. Montrer que dans ce langage, T élimine les quantificateurs : pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_l)$ ($l \in \mathbb{N}^*$) du premier ordre à exactement l variables dans le langage $\mathcal{L}^+$, il existe une formule $\psi(x_1, \dots, x_l)$ avec les mêmes variables libres telle que $T \vdash \forall x_1 \dots x_l (\phi(x_1, \dots, x_l) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_l))$.

II. Soit $\mathcal{L}$ le langage des groupes. Soit G un groupe infini abélien d'exposant p pour un nombre premier p. Un exemple serait

$$\oplus_{i<\omega} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ .$$

Nous élargissons le langage $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ à $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_g : g \in G\}$. Le groupe G, en tant que $\mathcal{L}^+$-structure est un exemple de ce que vous avez vu en dm5, exercice 2. Bien sûr, c'est à vérifier et c'est l'objectif de cet exercice.

1. Montrer que si $\phi(x, y_1, \dots, y_k)$ ($k \in \mathbb{N}$, en particulier il peut n'y avoir qu'une seule variable libre, à savoir x) est une formule du langage $\mathcal{L}$ avec variables libres $\{x, y_1, \dots, y_k\}$, alors pour tout k-uplet de symboles de constantes $(c_{g_1}, \dots, c_{g_k})$ nommant $(g_1, \dots, g_k) \in G^k$ l'ensemble

$$\{x \in G \ : \ (G; +, -, 0, (g \in G)) \models \phi(x, c_{g_1}, \dots, c_{g_k})\}$$

est fini ou cofini. *(Indication : G dans le langage $\mathcal{L}$ est très homogène, en d'autres termes, il a beaucoup d'automorphismes, puisqu'il peut être vu comme un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Considérez ceux qui fixent les points g_i, $i \in \{1, \dots, k\}$).*

2. Le premier point ne dit rien sur les extensions élémentaires de G. Etendez le résultat à une conclusion telle que celle de l'exercice 2 du dm5.