Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015
Master I — Logique mathématique

Examen du 29 mai 2015 : correction
Durée 3h

Exercice 1 (Formule de Hausdorff et applications).
On veut montrer que, pour toute paire d'ordinaux (α, β), on a $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$.

1. *Prouver que cette formule est vraie pour $\alpha < \beta$.*
   Si $\alpha < \beta$ alors $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta$, donc $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\beta^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. On en déduit que dans ce cas $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.
   Avec un calcul similaire, on obtient facilement $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\beta}$ et on a donc bien l'égalité désirée.
   On suppose maintenant que $\beta \leq \alpha$.
2. *Montrer qu'il suffit de prouver que $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$.*
   Comme $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$, on a $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$; et il est immédiat que $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_{\alpha+1}$, ce dont on déduit que $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$.
3. *En utilisant le fait que $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier, montrer que*
$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \bigcup_{\gamma \in \aleph_{\alpha+1}} \gamma^{\aleph_\beta} .$$
   Cette question n'a été correctement traitée par personne, pourtant on avait fait une question identique en TD (trop vite, apparemment). On a $\beta < \alpha + 1$, donc $\aleph_\beta < \aleph_{\alpha+1}$. Considérons une fonction f de $\aleph_\beta$ dans $\aleph_{\alpha+1}$; son image est un sous-ensemble de $\aleph_{\alpha+1}$, de cardinal au plus $\aleph_\beta$, et est donc majorée par un $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$ par régularité. On vient de montrer que $f \in \gamma^{\aleph_\beta}$ pour un certain $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$, ce qui donne
$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \aleph_{\alpha+1}} \gamma^{\aleph_\beta} .$$
   L'inclusion réciproque est triviale, et on a obtenu le résultat demandé.
4. *Conclure.* Pour tout $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$, le cardinal de $\gamma^{\aleph_\beta}$ est majoré par $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, puisque $|\gamma| \leq \aleph_\alpha$. L'égalité obtenue à la question précédente nous donne donc
$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma \in \aleph_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} .$$
5. *A l'aide de cette formule, montrer que, si $n \in \omega$, alors on a, pour tout ordinal β, l'égalité $\aleph_n^{\aleph_\beta} = \aleph_n.2^{\aleph_\beta}$.*
   Raisonnons par récurrence : pour $n = 0$ on obtient facilement que les deux côtés de l'égalité ci-dessus valent $2^{\aleph_\beta}$, et l'égalité est vraie. Supposons-la maintenant vraie au rang n. Par la formule qu'on vient de démontrer, on a
$$\aleph_{n+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{n+1} \cdot \aleph_n^{\aleph_\beta} = \aleph_{n+1} \cdot \aleph_n \cdot 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{n+1} \cdot 2^{\aleph_\beta} .$$
6. (Bonus) *Montrer que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}.2^{\aleph_1}$.*
   Vu la question précédente, on aimerait bien avoir un lien entre $\aleph_\omega^{\aleph_1}$ et les $\aleph_n^{\aleph_1}$; par définition, on a
$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \left(\sum_n \aleph_n\right)^{\aleph_1} \leq \left(\prod_n \aleph_n\right)^{\aleph_1} = \prod_n \aleph_n^{\aleph_1} .$$
   De plus, on a aussi
$$\prod_n \aleph_n^{\aleph_1} \leq \prod_n \aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_1} .$$
   On vient d'établir que
$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \prod_n \aleph_n^{\aleph_1} .$$
   La formule de la question précédente nous donne donc
$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \prod_n (\aleph_n.2^{\aleph_1}) = (\prod_n \aleph_n) 2^{\aleph_1 \cdot \aleph_0} \leq \aleph_\omega^{\aleph_0}.2^{\aleph_1} .$$
   L'inégalité réciproque est immédiate, et on a fini.

Exercice 2.

Dans cet exercice, κ désigne un cardinal. Une partie $C \subseteq \kappa$ est appelée un club *si elle a les deux propriétés suivantes :*

- *Pour tout ordinal $\lambda < \kappa$, et pour toute application strictement croissante $f : \lambda \to C$, $\sup\{f(\alpha) : \alpha < \lambda\} \in C$ (C est fermé).*
- *Pour tout $\alpha \in \kappa$, il existe $\beta \in C$ tel que $\alpha < \beta$ (C est non borné).* **Il y avait une erreur dans la définition d'un club, qui a été corrigée ci-dessus et pendant l'examen ; mais une autre hypothèse fondamentale manquait : on doit supposer κ non dénombrable régulier ! Le barême a tenu compte de cette erreur ; cela dit, comme on va le voir, il n'était pas très difficile de produire un contre-exemple dans le cas d'un cardinal singulier.**

1. *On souhaite montrer que, si $\lambda < \kappa$ est un cardinal, et $\{C_\xi : \xi < \lambda\}$ est une famille de clubs, alors $C = \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ est un club.*
   (a) *Montrer que C est fermé.*
   Considérons $\lambda < \kappa$ et une fonction strictement croissante $f : \lambda \to C$; puisque chaque C_ξ est un club et f est à valeurs dans C_ξ on a $\sup\{f(\alpha) : \alpha < \lambda\} \in C_\xi$ pour tout ξ, et ceci donne le résultat désiré.
   (b) *On souhaite maintenant justifier que C est non borné.*
   C'est manifestement faux ! par exemple considérons le cas $\kappa = \omega$; alors l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont des clubs, mais leur intersection est vide. Pour un contre-exemple plus intéressant, considérons le cas où $\kappa = \aleph_\omega$. Alors l'ensemble formé par les $\aleph_n$ $(n < \omega)$ est un club (d'après la définition corrigée donnée lors de l'épreuve), et il en va de même de l'ensemble des $\aleph_n + 1$... Dans la suite on fait donc l'hypothèse supplémentaire que κ est régulier et non dénombrable (sans quoi le raisonnement de la question qui vient ne peut pas aboutir).
      i. *En utilisant une démonstration par récurrence transfinie, montrer que l'on peut construire une famille $(\gamma_{\alpha,j})_{\alpha<\lambda, j<\omega}$ d'éléments de κ tels que l'on ait : $\gamma_{\alpha,j} \in C_\alpha$ pour tout $\alpha < \lambda$; et*
      $$\left(\gamma_{\alpha,j} < \gamma_{\alpha',j'}\right) \Leftrightarrow \left(j < j' \text{ ou } j = j' \text{ et } \alpha < \alpha'\right) .$$
      Ici la démonstration était peut-être un peu délicate à écrire, et sur les copies on voit beaucoup de confusion sur le résultat qu'on souhaite obtenir ; si on commence par construire tous les $\gamma_{0,j}$, par exemple, alors on ne peut pas être sûr de pouvoir continuer la construction. Il faut être un peu plus subtil : commenons par le cas $j = 0$. Par récurrence transfinie, en utilisant que $\lambda < \kappa$ et chaque C_α est non borné, on peut construire pour tout $\gamma < \kappa$ une famille strictement croissante $\gamma_{\alpha,0}$ d'ordinaux $> \gamma$ et tels que $\gamma_{\alpha,0} \in C_\alpha$ pour tout $\alpha < \lambda$ (d'après les copies tout le monde saurait rédiger cela). Supposons maintenant avoir construit tous les $\gamma_{\alpha,i}$ pour $i \leq n$. Ils forment une famille d'éléments de κ de cardinal strictement inférieur à κ (parce que $\lambda < \kappa$). Il existe donc (parce que κ est régulier !) $\delta < \kappa$ qui majore tous les élements de cette famille ; en appliquant notre construction ci-dessus avec $\gamma = \delta + 1$, on obtient les $\gamma_{\alpha,n+1}$.
      ii. *Pour tout $\alpha < \lambda$ on pose $\gamma_\alpha = \sup\{\gamma_{\alpha,j} : j < \omega\}$. Montrer que $\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha'}$ pour tout $\alpha, \alpha' < \lambda$.*
      Soir $\alpha \leq \alpha' < \lambda$. Pour tout n on a $\gamma_{\alpha,n} \leq \gamma_{\alpha',n} < \gamma_{\alpha,n+1}$, ce qui nous donne immédiatement $\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha'}$. On note cet élément γ.
      iii. *Conclure.*
      C'est là qu'on utilise que κ n'est pas de cofinalité dénombrable (puisqu'il est non dénombrable et régulier) : chaque γ_α est strictement inférieur à κ en tant que sup d'un sous ensemble dénombrable de κ. De plus, on a vu dans la construction de la question précédente que, pour tout $\delta < \kappa$, on pouvait faire en sorte que $\gamma_{\alpha,i} > \delta$ pour tout (α, i), en particulier $\gamma > \delta$. De plus, γ appartient à chaque C_α puisque C_α est un club. On a fini de montrer que C est non borné.
2. *On dit qu'une partie S de κ est* stationnaire *si $S \cap C \neq \emptyset$ pour tout club C. Dans cette question, on suppose $\kappa = \aleph_2$. Montrer que $\{\alpha < \aleph_2 : cof(\alpha) = \omega\}$ est stationnaire mais n'est pas un club (on pourra par exemple considrer le sup des ordinaux de la forme $\alpha + \omega$, où α est un ordinal dénombrable).*
   Suivons l'indication ; pour tout club C de $\aleph_2$ on peut construire une suite strictement croissante α_n d'éléments de C, dont le sup α appartient à C. α ne peut pas être successeur, et sa cofinalité est donc supérieure à ω ; mais on a construit α comme borne supérieure d'une suite, donc sa cofinalité est inférieure à ω. Par conséquent, on vient de trouver un élément de C de cofinalité ω, montrant ainsi que l'ensemble des éléments de $\aleph_2$ de cofinalité ω est stationnaire.

Pour montrer que ce n'est pas un club, considérons tous les ordinaux de la forme $\alpha + \omega$, où α est un ordinal dénombrable. Tous ces ordinaux sont de cofinalité ω, et leur borne supérieure est ω_1, qui est régulier et donc pas de cofinalité ω. Ceci montre que l'ensemble des éléments de $\aleph_2$ de cofinalité ω n'est pas fermé et n'est donc pas un club.

3. *Est-ce que l'intersection de deux ensembles stationnaires est stationnaire ?*
   En utilisant un raisonnement similaire à celui ci-dessus, on voit que l'ensemble des éléments de $\aleph_2$ de cofinalité ω_1 est stationnaire, et on voit ainsi que deux ensembles stationnaires peuvent être d'intersection vide.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{L} = \{E_i | i < \omega\}$ où les E_i sont des symboles de relation binaires. On fixe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. *Dans ce langage, écrire les énoncés du premier ordre qui expriment que*
   - *chaque E_i est une relation d'équivalence dont chaque classe est infinie ;*

$$(i < \omega) \qquad \forall xyz (E_i(x,x) \wedge (E_i(x,y) \leftrightarrow E_i(y,x)) \wedge (E_i(x,y) \wedge E_i(y,z) \rightarrow E_i(x,z))) \ ;$$

$$(n < \omega \ , \ a < \omega) \qquad \forall x \exists x_1 \ldots x_n (\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} E_a(x, x_i)) \ .$$

   - *pour $n \geq 1$, chaque E_{n-1}-classe est contenue dans une E_n-classe ;*

$$(n \in \mathbb{N}^*) \qquad \forall xy (E_{n-1}(x,y) \rightarrow E_n(x,y)) \ .$$

   - *pour $n \geq 1$, chaque E_n-classe est la réunion d'exactement p E_{n-1}-classes.*

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \forall x \exists x_1 \ldots x_p \forall y (\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq p} \neg E_{n-1}(x_i, x_j) \ \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq p} E_n(x, x_i) \ \wedge (E_n(x,y) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{p} E_{n-1}(x, x_i))) \ .$$

2. *On pose $M = \omega \times X$ où X est un ensemble infini. On interprète E_0 par*

$$\mathcal{M} \ \models \ E_0((a,b),(c,d)) \ \textit{ si et seulement si } \ a \ = \ c \ .$$

   Trouver des interprétations pour les E_i $i \geq 1$ pour que $\mathcal{M} = (M, E_i \ (i \in \omega))$ soit un modèle des énoncés du premier point.

   Réponse : Pour tout $n < \omega$, on définit $E_n((a,b),(c,d))$ si et seulement si il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $|a - p^n q| \leq p^n - 1$ et $|c - p^n q| \leq p^n - 1$. Montrons que M muni de ces relations est un modèle. On commence par les propriétés élémentaires des E_n. Chaque E_n est une relation d'équivalence. La réflexivité et la symétrie de la relation sont évidentes. La transitivité est une conséquence du fait que la division euclidienne est uniquement définie. Les classes sont infinies vu que X est un ensemble infini et que les deuxièmes coordonnées ne jouent aucun rôle.
   Vérifions maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_{n-1} raffine E_n. On suppose donc que $E_{n-1}((a,b),(c,d))$. Par définition $|a - p^{n-1}q| \leq p^{n-1} - 1$ et $|c - p^{n-1}q| \leq p^{n-1} - 1$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = p^{n-1}q + i$ avec $0 \leq i \leq p^{n-1} - 1$. On divise en euclidien q par p : $a = p^{n-1}q + i = p^{n-1}(pq' + i') + i = p^n q' + p^{n-1} i' + i$ $(0 \leq i' \leq p - 1)$. Or, $p^{n-1} i' + i \leq p^n - p^{n-1} + p^{n-1} - 1 = p^n - 1$. Comme le même calcul se fait avec c aussi, on conclut que $E_n((a,b),(c,d))$.
   Finalement, comme chaque E_n-classe contient p^n premières coordonnées distinctes, on conclut que chaque E_n-classe est la réunion d'exactement p E_{n-1}-classes $(n \in \mathbb{N}^*)$.

   On notera T_p la théorie formée par les énoncés du premier point et leurs conséquences.

3. *Montrer que tout modèle de T_p a une extension élémentaire qui contient une infinité de "composantes connexes" : il existe une infinité de α_i dans l'extension élémentaire en question tels que $\neg E_n(\alpha_i, \alpha_j)$ soit vrai pour tout $n < \omega$ et tous i, j satisfaisant $i \neq j$.*

   Réponse : On élargit le langage en définissant $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_i | i \in I\} \cup \{m | m \in M\}$ où M est l'ensemble de base d'un modèle $\mathcal{M}$ de T_p. On définit ensuite

$$T \ = \ \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\neg E_n(c_i, c_j) \mid i \neq j \ ; \ i, j \in I \ , \ n < \omega\} \ .$$

On montrera par compacité que T est un ensemble consistant d'énoncés, ce qui est suffisant pour répondre à la question. Une partie finie T_0 de T est de la forme $(T_0 \cap \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)) \cup \{\neg E_{n_1}(c_{i_1}, c_{j_1}), \ldots, \neg E_{n_k}(c_{i_k}, c$ On peut supposer $n_1 \leq \ldots \leq n_k$. Comme chaque E_i a une infinité de classes, on peut interpréter les c_{i_j} distincts (il peut y avoir des répétitions) par des éléments du modèle inéquivalents par rapport à E_{n_k}. Alors $\mathcal{M} \models T_0$.

4. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T_p satisfaisant la condition du point précédent et $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ et $(b_1, \ldots, b_k) \in N^k$ qui satisfont les conditions suivantes :*

$$\textit{pour tous } \ 1 \leq i, j \leq k \ , \ \mathcal{M} \models a_i = a_j \ \ \textit{si et seulement si } \mathcal{N} \models b_i = b_j \ \ ;$$

$$\textit{pour tous } \ 1 \leq i, j \leq k \ \textit{et } n < \omega \ , \mathcal{M} \models E_n(a_i, a_j) \ \ \textit{si et seulement si } \mathcal{N} \models E_n(b_i, b_j) \ \ .$$

Montrer que pour tout $\alpha \in M$, il existe $\beta \in N$ tels que $(a_1, \ldots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \ldots, b_k, \beta)$ satisfassent les mêmes conditions.

Réponse : On utilisera la notation de l'énoncé. Plusieurs cas sont possibles pour α. On les étudie séparément.

$\alpha \in \{a_1, \ldots, a_k\}$ *:* En d'autres termes, il existe $1 \leq i \leq k$ tek que $\alpha = a_i$. On pose $\beta = b_i$. La première condition assure que les $(k+1)$-uplets ainsi obtenus satisfont les mêmes conditions.

$\alpha \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$ *et* $I = \{1 \leq i \leq k \mid$ *il existe* $n_i \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M} \models E_{n_i}(\alpha, a_i)\}$ *n'est pas vide :* On définit $n_0 = \min\{n_i | i \in I\}$. On choisit $\beta \notin \{b_1, \ldots, b_k\}$ dans la même n_i-classe que $b_i (i \in I)$. Ceci est possible puisque les classes sont infinies. Les deux $(k+1)$-uplets ainsi obtenus satisfont les mêmes contraintes soit par le choix de β soit par les relations déjà existantes entre les coordonnées autre que α et β.

pour tout $1 \leq i \leq k$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} \models \neg E_n(\alpha, a_i)$ *:* Comme $\mathcal{N}$ contient une infinité de composantes connexes, on peut choisir β d'une composante qui est différente de celles des b_i.

5. *Déduire du point précédent que T_p est complète et qu'elle élimine les quanteurs.*

Réponse : D'abord on établit la complétude. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T qu'on peut supposer avoir une infinité de composantes connexes quitte à les remplacer par des extensions élémentaires. La famille des isomorphismes partiels entre les sous-structures finies de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$ est non vide puisque toute paire $(\alpha, \beta) \in M \times N$ est le graphe d'un tel isomorphisme. Elle satisfait la condition de va-et-vient par le point précédent. Par conséquent, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Ainsi, T est complète.

Le va-et-vient du point précédent est aussi suffisant pour déduire l'élimination des quanteurs puisqu'elle montre que deux k-uplets ayant les mêmes types sans quanteurs, en particulier satisfaisant les deux conditions énoncées, sont ∞-équivalents, et que donc ils ont le même type.

6. *Donner une description de tous les types dans $S_1(T_p)$ et dans $S_2(T_p)$. Déterminer les 2-types non isolés.*

Réponse : Le va-et-vient du point 4 et l'élimination des quanteurs qui en découle donnent les conditions nécessaires et suffisantes qu'il faut satisfaire pour que deux uplets aient même type.

Commençons par le $S_1(T_p)$. Nous voulons déterminer quand deux éléments α et β d'un modèle $\mathcal{M}$ de T_p ont même type. Comme le passage aux extensions élémentaires ne change pas le type (sur $\emptyset$), on peut supposer que $\mathcal{M}$ ait une infinité de composantes connexes. Alors, comme nous l'avons constaté dans le point 5, α et β sont ∞-équivalents. Par conséquent tous les singletons ont le même type sur $\emptyset$.

Les conditions du point 4 montrent qu'il y a plusieurs 2-types. On garde la notation et les hypothèses du dernier paragraphe à ceci près que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Il y a trois cas possibles pour α : soit $\alpha_1 = \alpha_2$; soit $\alpha_1 \neq \alpha_2$, mais il existe $i < \omega$ tel que pour tout $j < i$, $\mathcal{M} \models \neg E_j(\alpha_1, \alpha_2)$ et que $\mathcal{M} \models E_i(\alpha_1, \alpha_2)$; soit pour tout $i < \omega$, $\mathcal{M} \models \neg E_i(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors, le point 4 montre que tout $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in M^2$ est ∞-équivalent à α si et seulement s'il satisfait les mêmes conditions, bien sûr avec la mêm valeur de i dans le deuxième cas. Il existe donc une infinité dénombrable de 2-types.

Si on est dans le premier cas, le type en question est isolé par la formule $x_1 = x_2$. Si on est dans le deuxième cas, pour chaque $i < \omega$, la formule $x_1 \neq x_2 \wedge \bigwedge_{j<i} \neg E_j(x_1, x_2) \wedge E_i(x_1, x_2)$ isol le seul type pour la valeur fixée de i. Dans le troisième cas, le seul type possible n'est pas isolé ; en effet, le modèle du point 2 ne réalise pas ce type puisqu'il n'a qu'une seule composante connexe.

7. *Déterminer le modèle premier de T_p.*

Réponse : Le modèle du point 2 est un modèle avec une seule composante connexe. Un raisonnement similaire à celui du point précédent montre que le type d'un uplet arbitraire et fini est isolé. Par conséquent, c'est un modèle atomique. Si X est choisi dénombrable, alors ce modèle est atomique.

8. *Caractériser les modèles ω-saturés de T_p.*

   Réponse : Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T_p. Alors, $\mathcal{M}$ a une infinité de composantes connexes (pourquoi ?). Si $\mathcal{N}$ est un autre modèle de T_p avec une infinité de composantes connexes, alors le va-et-vient du point 4 montre que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont ∞-équivalents. Ceci implique que $\mathcal{N}$ est aussi ω-saturé. Ainsi, on conclut qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T_p est ω-saturé si et seulement s'il contient une infinité de composantes connexes.

9. *La théorie T_p est-elle $\aleph_0$-catégorique ?*

   Réponse : Non parce qu'il y a un 2-type sur $\emptyset$ qui n'est pas isolé.