Partiel 16 mars 2015

Les règles du jeu :

1. *Vous pouvez utiliser tout résultat du cours... sauf si la question est de démontrer un tel résultat.*
2. *Les documents, ainsi que la communication avec les autres étudiants ne sont pas autorisés.*
3. *Les questions au surveillant sont encouragées.*
4. *Vous avez 3 exercices et 2 heures. Bon travail...*

Exercice 1 (Révisions de cours)

I. (2 pts) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dont on note M l'ensemble sous-jacent. On augmente le langage $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}^+$ en ajoutant un symbole de constante c_m à $\mathcal{L}$ pour chaque $m \in M$. On considère dans le langage $\mathcal{L}^+$ l'ensemble des énoncés

$$D = \{\phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) | (m_1, \dots, m_k) \in M^k \ (k \in \mathbb{N}),\ \phi(x_1, \dots, x_k) \text{ est sans quanteurs}$$

$$\text{et satisfaite dans } \mathcal{M} \text{ par } (m_1, \dots, m_k)\} \ .$$

Montrer que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}$ est modèle de D en tant que $\mathcal{L}^+$-structure, alors il existe un homomorphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ en tant que $\mathcal{L}$-structures.

II. (2 pts) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures ∞-équivalentes. Montrer que si les deux structures sont dénombrables, alors elles sont isomorphes.
(*Dénombrable est utilisé au sens suivant : "en bijection avec $\mathbb{N}$".*)

III. (0,5 pts) Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures d'ensembles sous-jacents M et N respectivement, et $A \subset M$. Montrer que si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in M^n$, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$.

Exercice 2 (Svenonius) Cet exercice a pour but de démontrer la moitié suivante du théorème dit de Svenonius :

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'ensemble sous-jacent M, $A \subset M$ et D une partie définissable de M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Si

(*) *pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, pour tout automorphisme σ de $\mathcal{N}$ fixant A point par point et pour tout $x \in N^n$ (l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{N}$), $\mathcal{N} \models D(x)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\sigma(x))$,*

alors D est définissable par une formule à paramètres dans A.

Dans l'énoncé, on a noté D la formule définissant l'ensemble D. On gardera la même notation.

1. (1 pt) Montrer que la condition **(*)** équivaut à

Si pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et toute paire d'éléments $\alpha, \beta \in N^n$ on a $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\beta/A)$, alors $\mathcal{N} \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\beta)$.

2. (3 pts) On fixe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\alpha \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models D(\alpha)$. On notera $\mathcal{L}^+$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ n symboles de constantes $c_1, \dots, c_n$ et un symbole de constante pour chaque élément de M. On pose $c = (c_1, \dots, c_n)$. Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(c) \mid \phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A) \ \} \cup \ \{\neg D(c)\} \ .$$

En déduire l'existence d'une formule D_α dans $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$ telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\alpha(x) \to D(x))$ soit vrai.

3. (2 pts) Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et tous les n-uplets de celles-ci qui satisfont D. Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule D_∞ à paramètres dans A telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\infty(x) \leftrightarrow D(x))$ soit vrai.

Exercice 3 (La théorie du successeur) On définit le langage $\mathcal{L} = \{0, S\}$, où 0 est un symbole de constante et S un symbole de fonction unaire.

1. (1 pt) Écrire en premier ordre les énoncés qui expriment
   - que S est une injection,
   - que tout élément différent de 0 a une image inverse, son "prédécesseur",
   - que 0 n'en a pas,
   - qu'il n'y a pas de "boucle" : si $S^n(x) = x$ alors $n = 0$.

   Cet ensemble d'énoncés est consistant vu que l'ensemble des nombres naturels muni de la fonction $x \mapsto x+1$ en est un modèle. On notera T la théorie formée des conséquences de ces énoncés.
   On dira que deux éléments x et y sont à distance infinie si il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = S^n(y)$ ou $y = S^n(x)$.

2. (3 pts) Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle de T d'ensemble sous-jacent M et que $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$, la sous-structure engendrée par $\{m_1, \ldots, m_n\}$ est isomorphe à l'union disjointe $\sqcup_{i \in I}\mathbb{N}$ munie de la fonction $x \mapsto x + 1$ sur chaque composante, où $1 \leq |I| \leq \max\{1, n\}$. (*Notons que n peut être* 0.)
3. (3 pts) Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire ayant une infinité d'éléments deux à deux à distance infinie.
4. (3 pts) Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T d'ensembles sous-jacents M et N respectivement qui satisfont la condition du point 3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soient $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ et $(b_1, \ldots, b_k) \in N^k$ deux uplets qui satisfont les conditions suivantes :

   (i) pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_i = S^n(0)$ si et seulement si $b_i = S^n(0)$;

   (ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_i = S^n(a_j)$ si et seulement si $b_i = S^n(b_j)$.

   Montrer que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ se correspondent par un ∞-isomorphisme. En déduire que T élimine les quanteurs.
5. (1.5 pts) Montrer que les isomorphismes partiels entre deux sous-structures de type fini de deux modèles de T ayant la propriété du point 3 forment une famille karpienne.
6. (0.5 pts) Déduire du point précédent que T est une théorie complète.
7. (2 pts) Caractériser les modèles ω-saturés de T.