Partiel 16 mars 2015 – Corrigé

Exercice 1 (Révisions de cours)

I. (2 pts) *Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dont on note M l'ensemble sous-jacent. On augmente le langage $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}^+$ en ajoutant un symbole de constante c_m à $\mathcal{L}$ pour chaque $m \in M$. On considère dans le langage $\mathcal{L}^+$ l'ensemble des énoncés*

$$D = \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}) | (m_1, \ldots, m_k) \in M^k \ (k \in \mathbb{N}), \ \phi(x_1, \ldots, x_k) \textit{ est sans quanteurs}$$
$$\textit{et satisfaite dans } \mathcal{M} \textit{ par } (m_1, \ldots, m_k)\} \ .$$

Montrer que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}$ est modèle de D en tant que $\mathcal{L}^+$-structure, alors il existe un homomorphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ en tant que $\mathcal{L}$-structures.

Réponse : On notera $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{N}^+$ les expansions de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$ à $\mathcal{L}^+$. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} F & : & M & \longrightarrow & N \\ & & m & \longmapsto & c_m^{\mathcal{N}^+} \end{array} ,$$

et on montre qu'elle définit un morphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$. Il y a trois points à régler : les constantes, les fonctions et les relations.

Soit c un symbole de constante de $\mathcal{L}$. On veut montrer que $F(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$. Dans $\mathcal{M}$, la formule sans quanteurs $x = c$ est satisfaite par $c^{\mathcal{M}}$. Par l'hypothèse sur D et $\mathcal{N}$, elle est satisfaite dans $\mathcal{N}$ par $c^{\mathcal{N}}$. La conclusion découle de la définition de F.

Soit f un symbole de fonction $n$aire pour $n \in \mathbb{N}^*$. On veut vérifier que pour tout $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$, $F(f(m_1, \ldots, m_n)) = f(F(m_1), \ldots, F(m_n))$. La formule sans quanteurs $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ est satisfaite dans $\mathcal{M}$ par $(m_1, \ldots, m_n, f(m_1, \ldots, m_n))$. Par l'hypothèse sur D et $\mathcal{N}$, $c_{f(m_1,\ldots,m_n)} = f(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n})$ est satisfaite dans $\mathcal{N}^+$ par $(c_{m_1}^{\mathcal{N}^+}, \ldots, c_{m_n}^{\mathcal{N}^+}, c_{f(m_1,\ldots,m_n)}^{\mathcal{N}^+})$. Or, $F(f(m_1, \ldots, m_n)) = c_{f(m_1,\ldots,m_n)}^{\mathcal{N}^+}$ et $f(F(m_1), \ldots, F(m_n)) = f(c_{m_1}^{\mathcal{N}^+}, \ldots, c_{m_n}^{\mathcal{N}^+})$ par la définition de F. La condition de morphisme pour les fonctions est satisfaite.

Soit R un symbole de relation $n$aire avec $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que pour tout $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$, si $(m_1, \ldots, m_n) \in R^{\mathcal{M}}$ alors $(F(m_1), \ldots, F(m_n)) \in R^{\mathcal{N}}$. Or $(m_1, \ldots, m_n) \in R^{\mathcal{M}}$ veut dire que la formule sans quanteurs $R(x_1, \ldots, x_n)$ est satisfaite $(m_1, \ldots, m_n)$ dans $\mathcal{M}$. Par l'hypothèse sur $\mathcal{N}$ et D, $R(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n})$ est satisfaite dans $\mathcal{N}^+$ par $(c_{m_1}^{\mathcal{N}^+}, \ldots, c_{m_n}^{\mathcal{N}^+})$. La condition de morphisme pour les relations découle de la définition de F.

II. (2 pts) *Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures ∞-équivalentes. Montrer que si les deux structures sont dénombrables, alors elles sont isomorphes.*

(Dénombrable est utilisé au sens suivant : “en bijection avec $\mathbb{N}$”.)

Réponse : C'était un DM de lecture, la proposition 6.15 des notes de cours.

III. (0,5 pts) *Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures d'ensembles sous-jacents M et N respectivement, et $A \subset M$. Montrer que si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in M^n$, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$.*

Réponse : Soit ϕ une $\mathcal{L}(A)$-formule. Alors, $\phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$ si et seulement si $(\mathcal{M}, A) \models \phi(a)$ si et seulement si $(\mathcal{N}, A) \models \phi(a)$ (parce que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ et que $A \subset M$) si et seulement si $\phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$.

Exercice 2 (Svenonius) *Cet exercice a pour but de démontrer la moitié suivante du théorème dit de Svenonius :*

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure d'ensemble sous-jacent M, $A \subset M$ et D une partie définissable de M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Si

(*) pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, pour tout automorphisme σ de $\mathcal{N}$ fixant A point par point et pour tout $x \in N^n$ (l'ensemble sous-jacent de $\mathcal{N}$), $\mathcal{N} \models D(x)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\sigma(x))$,

alors D est définissable par une formule à paramètres dans A.

Dans l'énoncé, on a noté D la formule définissant l'ensemble D. On gardera la même notation.

1. (1 pt) *Montrer que la condition* **(*)** *équivaut à*

Si pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et toute paire d'éléments $\alpha, \beta \in N^n$ on a $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\beta/A)$, alors $\mathcal{N} \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\beta)$.

Réponse : Admettons d'abord la condition (*). Soient $\alpha, \beta, \mathcal{N}$ comme dans l'hypothèse de la condition du point 1. de l'exercice. D'après la proposition 8.9 des notes de cours, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N}'/A)$ tel que $\sigma(\alpha) = \beta$. D'après l'hypothèse (*), $\mathcal{N}' \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N}' \models D(\beta)$. Équivalemment, $D \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}'}(\alpha/A)$ si et seulement si $D \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}'}(\beta/A)$. Or d'après la question III du premier exercice $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}'}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)$ et $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}'}(\beta/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\beta/A)$ puisque $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}'$. Ainsi, $\mathcal{N} \models D(\alpha)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models D(\beta)$.

Admettons maintenant la condition du point 1. Soient $\mathcal{N}, \sigma, x$ comme dans l'hypothèse de la condition (*). Alors x et $\sigma(x)$ ont même type sur A dans $\mathcal{N}$. La conclusion de la condition (*) en découle.

2. (3 pts) *On fixe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ et $\alpha \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models D(\alpha)$. On notera $\mathcal{L}^+$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ n symboles de constantes $c_1, \ldots, c_n$ et un symbole de constante pour chaque élément de M. On pose $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Montrer que l'ensemble suivant d'énoncés de ce langage est inconsistant :*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\phi(c) \mid \phi \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)\ \} \cup \ \{\neg D(c)\}\ .$$

En déduire l'existence d'une formule D_α dans $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(a/A)$ telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x (D_\alpha(x) \to D(x))$ soit vrai.

Réponse : Soient $\mathcal{N}, c, c_1, \ldots, c_n, \alpha$ comme dans l'énoncé. Si l'ensemble ci-dessus d'énoncés était consistant alors il aurait un modèle $\mathcal{P}$ qui serait aussi extension élémentaire de $\mathcal{M}$ dans le langage $\mathcal{L}$. Dans $\mathcal{P}$, $c^{\mathcal{P}}$ réalise $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)$ mais $\mathcal{P} \models \neg D(c^{\mathcal{P}})$. En particulier, $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{P}}(c^{\mathcal{P}}/A)$, et dans une extension élémentaire $\mathcal{P}'$ commune de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{N}$, on aurait $\mathrm{tp}_{\mathcal{P}'}(\alpha/A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{P}'}(c^{\mathcal{P}}/A)$. Or $\mathcal{P}' \models \neg D(c^{\mathcal{P}})$ tandis que α satisferait D dans $\mathcal{P}'$, ce qui contredit l'équivalent de la condition (*) obtenu dans le premier point de l'exercice.

Par compacité, il existe une partie finie de cet ensemble qui est inconsistante. On note D_α son intersection avec $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)$ (après avois remplacé c par des variables). Alors, $D_\alpha \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\alpha/A)$ et dans tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$, en d'autres termes dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, tout n-uplet qui satisfait de D_α satisfait aussi D puisque sinon on obtiendrait une réalisation de l'ensemble d'énoncés dont nous venons de vérifier l'inconsistance. Ainsi dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\alpha(x) \to D(x))$ est vrai.

3. (2 pts) *Le raisonnement du point précédent s'étend à toutes les extensions élémentaires de $\mathcal{M}$ et tous les n-uplets de celles-ci qui satisfont D. Utiliser ceci pour montrer l'existence d'une formule D_∞ à paramètres dans A telle que dans toute extension élémentaire de $\mathcal{M}$, l'énoncé $\forall x(D_\infty(x) \leftrightarrow D(x))$ soit vrai.*

Réponse : On énumère $(\mathcal{N}_i, \alpha_i)_{i \in I}$, par un ensemble d'indices I, tous les types $\mathrm{tp}_{\mathcal{N}_i}(\alpha_i/A)$ avec $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}_i$ et $\mathcal{N}_i \models D(\alpha_i)$. On vérifie l'inconsistance de l'ensemble d'énoncés

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \ \cup \ \{\neg D_{\alpha_i}(c) \mid i \in I\} \ \cup \ \{D(c)\}$$

dans le langage $\mathcal{L}^+$. Dans le cas contraire, il existe une extension élémentaire $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$, en tant que $\mathcal{L}$-structures, dans laquelle la réalisation $c^{\mathcal{P}}$ de c ne satisfait aucune des D_{α_i} mais D. Cette dernière satisfaction implique que $(\mathcal{P}, c^{\mathcal{P}})$ soit dans $((\mathcal{N})_i, \alpha_i) | i \in I\}$. Par conséquent, $(\mathcal{P}, A, c^{\mathcal{P}}) \models D_{c^{\mathcal{P}}}(c)$, absurde.

Par compacité, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tels que si $\mathcal{P} \succeq \mathcal{M}$, alors $\mathcal{P} \models \forall x(D(x) \to \bigvee_{i=1}^d D_{\alpha_i}(x))$. Ceci implique avec le point précédent de l'exercice que $\mathcal{P} \models \forall x(D(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^d D_{\alpha_i}(x))$. Comme $\bigvee_{i=1}^d D_{\alpha_i}(x)$ ne contient que des paramètres de A, $\mathcal{M} \models \forall x(D(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^d D_{\alpha_i}(x))$. On définit alors $D_\infty = \bigvee_{i=1}^d D_{\alpha_i}$.

Exercice 3 (La théorie du successeur) *On définit le langage $\mathcal{L} = \{0, S\}$, où 0 est un symbole de constante et S un symbole de fonction unaire.*

1. (1 pt) *Écrire en premier ordre les énoncés qui expriment*
   - *que S est une injection,*
   - *que tout élément différent de 0 a une image inverse, son "prédécesseur",*
   - *que 0 n'en a pas,*
   - *qu'il n'y a pas de "boucle" : si $S^n(x) = x$ alors $n = 0$.*

   Réponse :
   - $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
   - $\forall x \exists y (x = 0 \vee S(y) = x)$
   - $\neg \exists x (S(x) = 0)$
   - $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\neg \exists x (\underbrace{S(S(\ldots S}_{n \text{ fois}}(x) = x)\ldots))$

   Cet ensemble d'énoncés est consistant vu que l'ensemble des nombres naturels muni de la fonction $x \mapsto x+1$ en est un modèle. On notera T la théorie formée des conséquences de ces énoncés.
   On dira que deux éléments x et y sont à distance infinie si il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = S^n(y)$ ou $y = S^n(x)$.

2. (3 pts) *Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle de T d'ensemble sous-jacent M et que $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$, la sous-structure engendrée par $\{m_1, \ldots, m_n\}$ est isomorphe à l'union disjointe $\sqcup_{i \in I} \mathbb{N}$ munie de la fonction $x \mapsto x + 1$ sur chaque composante, où $1 \leq |I| \leq \max\{1, n\}$.* (Notons que n peut être 0.)

   Réponse : On notera $\mathcal{M}_0$ la sous-structure de type fini en question. Elle (ou plus précisément son ensemble sous-jacent) est l'intersection de toutes les sous-structures contenant $\{m_1, \ldots, m_n\}$. On notera M_0 son ensemble sous-jacent. La définition d'une sous-structure montre que M_0 contient $S^i(0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Si M_0 ne contient pas d'autres éléments, alors la correspondance $i \mapsto S^i(0)$ définit un isomorphisme entre $(\mathbb{N}, x \mapsto x + 1)$ et (M_0, S).
   Sinon, on partitionne $\{m_1, \ldots, m_n\} \setminus \{S^i(0) | i \in \mathbb{N}\}$ selon la distance : m_i et m_j sont dans la même classe si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $S^k(m_i) = m_j$ ou $S^k(m_j) = m_i$. Chaque classe a un générateur, un élément x_0, et un seul, tel que tout autre élément soit de la forme $S^i(x_0)$ avec $i \in \mathbb{N}$. Pour vérifier ceci, on fixe arbitrairement un élément x dans la classe en question. Si x satisfait la condition de distance, il ne reste qu'à vérifier son unicité, ce qui découle de la nonexistence des boucles. S'il existe un élément x' et $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^i(x') = x$ alors on considère tous les éléments de la même classe ayant cette propriété et on choisit celui avec i maximal. Il en existe un puisque chaque classe contient un nombre fini d'éléments. Notons-le x_0. Si x_1 est un autre élément de la même classe tel que $S^j(x_1) = x$ avec $j \in \mathbb{N}^*$ alors $i > j$ et $x_1 = S^{i-j}(x_0)$.
   Soient $\{m_{i_1}, \ldots, m_{i_d}\}$ les générateurs déterminés dans le paragraphe précédent. Alors, forcément $0 \leq d \leq n$. Par ailleurs, l'ensemble $\{S^i(0) | i \in \mathbb{N}\} \cup \sqcup_{j=1}^{d} \{S^k(m_{i_j}) | k \in \mathbb{N}\}$ est une sous-structure contenant $\{m_1, \ldots, m_n\}$. Comme elle est contenue dans toute sous-structure contenant $\{m_1, \ldots, m_n\}$, elle est la sous-structure engendrée par $\{m_1, \ldots, m_n\}$.
   Finalement, pour expliciter le type d'isomorphisme on peut utiliser la définition suivante :

$$\begin{array}{ccl} M_0 & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, d\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (i, 0) & \text{s'il existe } i \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = S^i(0) \\ (k, j) & \text{s'il existe } (k, j) \in \mathbb{N} \times \{1, \ldots, d\} \text{ tel que } x = S^k(m_{i_j}) \end{array} \right. . \end{array}$$

   Les quelques détails qui restent sont laissés à titre d'exercice de compréhension.

3. (3 pts) *Montrer que tout modèle de T a une extension élémentaire ayant une infinité d'éléments deux à deux à distance infinie.*

Réponse : Soient $\mathcal{M}$ un modèle de T et I un ensemble infini d'indices. On augmente le langage $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_m | m \in M\} \cup \{d_i | i \in I\}$. Dans ce langage on définit

$$T \;=\; \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) \;\cup\; \{\; S^k(d_i) \neq d_j \mid i, j \in I,\; i \neq j,\; k \in \mathbb{N} \;\}$$

On vérifiera que T est consistant. Pour ce faire, soit T_0 une partie finie de T. L'ensemble T_0 est de la forme

$$(T_0 \;\cap\; \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)) \;\cup\; \{\; S^{k_1}(d_{i_1}) \neq d_{j_1} \;, \ldots,\; S^{k_r}(d_{i_r}) \neq d_{j_r} \;\} \quad .$$

Comme $\mathcal{M} \models T$, M contient la sous-structure engendrée par 0. On définit $N = \max(k_1, \ldots, k_r) + 1$ et $d_{i_k}^{\mathcal{M}} = 2kN$ et $d_{j_k}^{\mathcal{M}} = (2k+1)N$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. Les interprétations sont suffisamment espacées pour satisfaire toutes les différences. Les énoncés provenant de $T_0 \;\cap\; \mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ sont évidemment satisfaits dans $(\mathcal{M}, M)$. Ainsi, T_0 a pour modèle $(\mathcal{M}, M)$. Par compacité, T est consistant, donc a un modèle $\mathcal{N}^+$ dans le langage $\mathcal{L}^+$ dont le réduit $\mathcal{N}$ au langage $\mathcal{L}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ satisfaisant la condition sur les "composantes connexes".

4. (3 pts) *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T d'ensembles sous-jacents M et N respectivement qui satisfont la condition du point 3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soient $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ et $(b_1, \ldots, b_k) \in N^k$ deux uplets qui satisfont les conditions suivantes :*

   (i) *pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_i = S^n(0)$ si et seulement si $b_i = S^n(0)$;*

   (ii) *pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_i = S^n(a_j)$ si et seulement si $b_i = S^n(b_j)$.*

   Montrer que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ se correspondent par un ∞-isomorphisme. En déduire que T élimine les quanteurs.

Réponse : L'hypothèse sur les k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ montre que la correspondance $\sigma : a_i \mapsto b_i \;\; (1 \leq i \leq k)$ détermine un isomorphisme partiel entre les sous-structures engendrées par $\{a_1, \ldots, a_k\}$ et $\{b_1, \ldots, b_k\}$. On montrera que l'on peut étendre cet isomorphisme par va-et-vient à des isomorphismes partiels ayant les propriétés (i) et (ii). Ceci montrera que la famille de tous ces isomorphismes partiels, qui contient σ, est karpienne. Soit $\alpha \in M$ arbitrairement fixé. Trois cas se présentent pour le choix de α :

VA

(a) $\underline{\alpha = a_i \text{ pour un certain } i \in \{1, \ldots, k\}}$ On choisit $\beta = b_i$.

(b) $\underline{\alpha \neq a_i \textit{ pour tous } i \in \{1, \ldots, k\}, \textit{ et il existe des } a_i \textit{ à distance finie de } \alpha}$ Notons I_0 l'ensemble des indices de ceux-ci. Il en découle que tous les éléments de $\{a_i | i \in I_0\}$ sont deux à deux à distances finies. Il en existe un, disons a_{i_0}, qui engendre les autres. En d'autres termes, pour tout a_i avec $i \in I_0$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $S^{n_i}(a_{i_0}) = a_i$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^m(\alpha) = a_{i_0}$ ou $S^m(a_{i_0}) = \alpha$. Comme $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ satisfont les mêmes conditions de distance, les éléments de $\{b_i | i \in I\}$ sont deux à deux à distances finies et b_{i_0} engendre les autres. Il suffit alors de définir β comme l'élément qui satifait la même relation avec b_{i_0} que celle entre α et a_{i_0}.

(c) $\underline{\alpha \neq a_i \textit{ pour tous } i \in \{1, \ldots, k\}, \textit{ et tous les } a_i \textit{ sont à distance infinie de } \alpha}$ Comme $\mathcal{N}$ a une infinité de composantes, on peut trouver des éléments dans N à distance infinie de tous les b_i. On définit comme β comme l'un d'entre eux.

VIENT Le raisonnement est symétrique.

Le raisonnement précédent montre que si deux k-uplets ont même type sans quanteurs, alors l'isomorphisme partiel entre les sous-structures qu'ils engendrent est un ∞-isomorphisme. En d'autres termes, ils ont même type. En d'autres termes, T élimine les quanteurs.

5. (1,5 pts) *Montrer que les isomorphismes partiels entre deux sous-structures de type fini de deux modèles de T ayant la propriété du point 3 forment une famille karpienne.*

   Réponse : Pour ce point, la tâche a été accomplie en grande partie. En effet, le va-et-vient du point précédent s'applique dans ce point aussi puisque deux sous-structures de type fini sont isomorphes si et seulement si elles sont engendrées par des parties finies qui se correspondent suivant les conditions du point précédent. Ce qui reste à faire est de vérifier qu'il existe une famille karpienne non vide d'isomorphismes partiels entre les sous-structures de type fini. Or, le langage a un symbole de constante, en l'occurrence 0, et les sous-structures engendrées par $0^{\mathcal{M}}$ et $0^{\mathcal{N}}$ sont isomorphes. Le raisonnement de va-et-vient du point précédent montre que cet isomorphisme appartient à une famille karpienne.

6. (0.5 pts) *Déduire du point précédent que T est une théorie complète.*

   Réponse : D'après le point 3, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles arbitraires de T, alors ils ont des extensions élémentaires $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ jouissant de la propriété sur le nombre infini de composantes. Le point 5 montre que $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ sont élémentairement équivalents. On en déduit l'équivalence élémentaire de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$.

7. (2 pts) *Caractériser les modèles ω-saturés de T.*

   Réponse : Il n'y avait qu'une seule réponse, moyennement satisfaisante, pour cette question. Elle garde donc son statut de question. Un DM ?...