# Fiche
## Exercices supplémentaires

**Exercice 1 (Une théorie sans modèle premier).**
Soit $\mathcal{L} = \{<,\ P,\ q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ où $<$ et $P$ sont des symboles de relation binaire et unaire respectivement. On étudiera la théorie de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ dont l'ensemble sous-jacent est $\mathbb{R}$, dans laquelle $q^{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}} = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $<^{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}}$ est la relation d'ordre usuelle des nombres réels et $P^{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}}$ contient exactement les nombres rationnels. On note cette théorie $T$. De par sa définition, $T$ est complète.

1. Montrer que $T$ a des modèles dénombrables.
2. Montrer que les ensembles de formules suivants sont tous consistants avec la théorie $T$ :
   - l'union $p_r(x) = \{q_i < x \mid i < \omega\} \cup \{x < q'_i \mid i < \omega\}$ où $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(q_i)_{i<\omega}$ et $(q'_i)_{i\in\omega}$ sont deux suites de rationnels qui respectivement accroissent et décroissent vers $r$ ;
   - l'ensemble $p_{+\infty}(x) = \{q < x \mid q \in \mathbb{Q}\}$ ;
   - l'ensemble $p_{-\infty}(x) = \{x < q \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
3. On garde la notation du point précédent. Montrer que si $\mathcal{M} \models T$, alors $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire $\bar{\mathcal{M}}$ qui a la propriété suivante pour tout $r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{\pm\infty\}$ :

   $p_r(\bar{\mathcal{M}})$, les réalisations de $p_r(x)$ dans $\bar{\mathcal{M}}$, contient un ensemble $X$ isomorphe à $\mathbb{Q}$ en tant qu'ensemble ordonné par $<$, tel que si $\alpha, \beta \in X$ tels que $\alpha < \beta$ et que $\bar{\mathcal{M}} \models P(\alpha) \wedge P(\beta)$, alors il existe $\gamma \in X$ tel que $\alpha < \gamma < \beta$ et que $\bar{\mathcal{M}} \models \neg P(\gamma)$, et que si $\alpha, \beta \in X$ tels que $\alpha < \beta$ et que $\bar{\mathcal{M}} \models \neg P(\alpha) \wedge \neg P(\beta)$, alors il existe $\gamma \in X$ tel que $\alpha < \gamma < \beta$ et que $\bar{\mathcal{M}} \models P(\gamma)$.

4. On garde la notation du point précédent. On fixe $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On obtient à partir de $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ une nouvelle $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{R}_{\mathbb{Q},r_0}$ qui diffère de $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ en un seul point : $\mathcal{R}_{\mathbb{Q},r_0} \models P(r_0)$. On notera $\mathcal{M}_{r_0}$ une sous-structure élémentaire de $\mathcal{R}_{\mathbb{Q},r_0}$ contenant $r_0$ (on peut la supposer dénombrable, mais ceci n'est pas nécessaire). Montrer que $\mathcal{M}_{r_0}$ a une extension élémentaire $\bar{\mathcal{M}}_{r_0}$ qui a la propriété du point 3 pour tout $r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{\pm\infty\}$.
5. Montrer que si $\mathcal{M} \models T$ et $\bar{\mathcal{M}}$ en est une extension élémentaire qui satisfait la propriété du point 3 pour tout $r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{\pm\infty\}$, alors $\bar{\mathcal{M}}$ et $\bar{\mathcal{M}}_{r_0}$ sont $\infty$-équivalentes en tant que $\mathcal{L}$-structures. En déduire que $\bar{\mathcal{M}}_{r_0}$ est un modèle de $T$.
6. Montrer que si $T$ un modèle atomique $\mathcal{M}_0$, alors celui-ci se plonge élémentairement dans $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{M}_{r_0}$ pour tout $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En déduire que $\mathcal{M}_0$ ne contient de réalisation de $p_{r_0}(x) \cup \{P(x)\}$ ni de $p_{r_0}(x) \cup \{\neg P(x)\}$ pour aucune $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En déduire que $\mathcal{M}_0$ ne contient que les rationnels et que ceci est une contradiction.
7. (*Ceci corrige une erreur de la séance du 11 mai 2015*) On garde la notation des points précédents. On fixe $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $p^+_{r_0}(x)$ un type qui contient $p_{r_0}(x) \cup \{P(x)\}$. Montrer que que $P(x)$ n'isole pas $p^+_{r_0}(x)$ (*La formule $P(x)$ appartient à $p^+_{r_0}(x)$ pour tout $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$*). Remarquons que le raisonnement symétrique se fait pour $p^-_{r_0}(x)$ qui étend $p_{r_0}(x) \cup \{\neg P(x)\}$.
8. Déterminer les modèles $\omega$-saturés de $T$. Déterminer $|S_1(T)|$.

**Exercice 2 (Le groupe additif des entiers).**
On notera $\mathcal{L}$ le langage des groupes exprimé additivement : $\{+, -, 0\}$. Dans ce langage, on étudiera $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ où $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, 0)$.

1. Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ de cette théorie a les propriétés suivantes :
   - $\mathcal{M}$ est un groupe abélien sans torsion (*élément d'ordre fini*) ;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}/n\mathcal{M}$ est un groupe cyclique d'ordre $n$.

   *On notera $T$ la théorie formée par les conséquences de ces énoncés. On montrera que $T$ est complète. Ceci équivaudra à dire que les énoncés ci-dessus axiomatisent* $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$.

2. (*Détour en théorie des groupes.*) Un groupe $G$ est dit *$n$-divisible* pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, si pour tout $g \in G$, il existe $g_n \in G$ tel que $g_n^n = g$. Un groupe $G$ est dit *divisible* s'il est $n$-divisible pour tout $n$. Le groupe $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ n'est pas divisible tandis que $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ l'est. L'image homomorphe d'un groupe divisible est divisible, un groupe divisible non trivial n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini. Un groupe abélien, divisible et *sans torsion* peut être vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ; par conséquent si $\kappa$ est un cardinal non dénombrable, alors il existe, à isomorphisme près un groupe abélien, divisible et sans torsion.

   Nous admettrons le résultat suivant : Si $A$ est un groupe abélien et que $D$ est un sous-groupe divisible de $A$, alors il existe un sous-groupe $B$ de $D$ tel que $A = D \oplus B$. (*La propriété d'injectivité des groupes abéliens divisibles.*)

3. Nous introduisons un nouveau groupe pour étudier les modèles $\omega$-saturés de $T$. On définit

   $$\hat{\mathbb{Z}} \;=\; \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \;\in \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\mid\; a_n \equiv a_m \pmod m \;\text{ si } m \text{ divise } n. \right\}$$

   On munit $\hat{\mathbb{Z}}$ d'une somme coordonnée par coordonnée dans les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ respectifs. Montrer que c'est un groupe sans torsion, de cardinal $2^{\aleph_0}$, et modèle de $T$.

4. Montrer qu'un modèle $\omega$-saturé $\mathcal{M}$ de $T$ a un sous-groupe divisible $D(\mathcal{M})$, maximal par rapport à cette propriété. Montrer que $\mathcal{M}/D(\mathcal{M}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$. On en déduit en utilisant le point 2 que $\mathcal{M} = D(\mathcal{M}) \oplus A$ où $A \cong \hat{\mathbb{Z}}$.

5. On garde la notation du point précédent. Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle $\kappa$-saturé de $T$ alors $D(\mathcal{M})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension au moins $\kappa$.

6. Déduire du point précédent que deux modèles arbitraires de $T$ ont des extensions élémentaires isomorphes et que $T$ est complète. Ainsi $T = \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$.

7. Montrer que $T$ est complète directement par va-et-vient.

8. Caractériser les modèles $\kappa$-saturés de $T$ pour $\kappa \geq \aleph_0$.

9. Dans ce point, nous montrerons que $T$ n'a pas de modèle premier. Pour ce faire, on introduit $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid (p, n) = 1\}$ où $p$ est un nombre premier fixé (*les rationnels $p$-adiques*). Clairement, c'est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est $n$-divisible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec $p$. Montrer que $\oplus_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_{(p)}$ est un modèle de $T$. Montrer qu'aucune sous-structure de $\oplus_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}_{(p)}$ isomorphe à $\mathcal{Z}$ n'est élémentaire. En déduire que $\mathcal{Z}$ n'est pas un modèle premier de $T$, et qu'ainsi $T$ n'a pas de modèle premier.

10. Soient $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$ et $A$ un ensemble de paramètres de cardinal $\kappa$. Montrer que $|S_1(A)| = \kappa$.

(*Cet exercice est modelé sur les notes de Zoé Chatzidakis au lien*
`http://www.logique.jussieu.fr/~zoe/papiers/DEAc.dvi` . )