
Fiche 1

Exercice 1 (Normes dans $\mathbb{R}^n$) Dans cet exercice on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

(A) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \| \ \|_2 & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \ . \end{array}$$

satisfait les conditions suivantes qui définissent une norme :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|_2 \geq 0$, et $\|x\|_2 = 0$ si et seulement si $x = 0$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$;
3. pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. (*Pour vérifier que* $\| \ \|_2$ *satisfait l'inégalité triangulaire, vous pouvez vous servir sans preuve de* ***l'inégalité de Cauchy-Schwarz*** *:*

$$\textit{pour tous} \quad (a_1, \dots, a_n) \ , \quad (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \ . \ )$$

(B) Montrer que les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

définissent des normes. Dessiner $B((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à $\|x\|_\infty$ et $\|x\|_1$.

(C) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \| \ \| & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de la forme $\|x\| = \alpha |x|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Exercice 2 (Équivalence de normes et une application)

1. Soit $\{a, b\} \subset \{1, 2, \infty\}$. Déterminer deux réels strictement positifs l et m tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $l\|x\|_a \ \leq \ \|x\|_b \ \leq \ m\|x\|_a$. (*Les trois normes* $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ *sont équivalentes.*)
2. Soient $E = \mathbb{R}^n$, $\| \ \|_p$ la norme p avec $p \geq 1$ qui est définie par $||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$ et $\| \ \|_\infty$ la norme ∞ qui est définie par $||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Montrer que $\lim_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

Exercice 3 (Nouvelles normes à partir d'anciennes)

1. Soient a, b, c, d quatre nombres réels. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rcccl} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & |ax + by| + |cx + dy| \end{array}$$

définit une norme dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible.

2. Vérifier que la fonction

$$\begin{array}{rcccl} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & |x + 2y| + |x - y| \end{array}$$

définit une norme dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner le cercle unité $\{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| = 1\}$ par rapport à cette norme.

3. Soient maintenant $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et f un endomorphisme inversible de E. En vous inspirant du premier point, définissez une nouvelle norme sur E, justifiez votre proposition.
4. Reprendre les questions du point 2 avec la fonction suivante.

$$\begin{array}{cccc} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \max(|x+3y|, |x-y|) \end{array}$$

5. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes différentes, N_1 et N_2. Montrer que pour toute paire de nombres réels strictement positifs la fonction $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto aN_1(x) + bN_2(x)$ est aussi une norme sur E.

Exercice 4 (Exemples, ou non, pour réviser : $\mathbb{R}^2$) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Les fonctions suivantes sur E, sont-elles des normes ?

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $N_1(x) = ||x||_2 + ||x||_1$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $N_2(x) = ||x||_2 - ||x||_1$;
3. $N_3((x_1, x_2)) = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$;
4. $N_4((x_1, x_2)) = x_1^2 + |x_2|$;
5. $N_5((x_1, x_2)) = \sqrt{|x_1|}$.

Exercice 5 (Exemples, ou non, pour réviser : polynômes) Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0,1]$. Les fonctions suivantes, sont-elles des normes ?

1. $N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|)$
2. $N_2(f) = N_1(f')$
3. $N_3(f) = N_1(f) + N_1(f')$

Exercice 6 (Fonctions bornées) On définit $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions bornées de domaine $\mathbb{R}$ et d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$: $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq C$.

1. On définit deux lois sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme suit. Si $f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ est la fonction qui associe $f(x) + g(x)$ à chaque $x \in \mathbb{R}$ et rf est celle qui associe $rf(x)$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ définit une norme sur cet espace.
2. Dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, expliciter une famille infinie et libre de vecteurs tous de normes 1 et deux à deux à distance 1. *(On définit la distance de $f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $N(f - g)$.)*
3. Soient maintenant X un ensemble arbitraire et $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. On définit $\mathcal{B}(X, E)$ comme les fonctions de domaine X et d'ensemble d'arrivée E, bornées par rapport à $\| \ \|$. Montrer que c'est un espace vectoriel normé. En conclure que l'ensemble des suites de nombres complexes bornées peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé. *(On verra $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel de dimension 2, et muni de sa norme usuelle.)*

Exercice 7 (Premiers pas en topologie) Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que l'intérieur de A est égal à A si et seulement si A est ouvert.