# Fiche 2

**Exercice 1 (La linéarité de la convergence)** Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites convergentes.

Montrer que $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$ et $\lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n$.

**Exercice 2 (Normes équivalentes et les topologies qu'elles induisent)** Soit $E$ un espace vectoriel normé muni de deux normes équivalentes $N_1$ et $N_2$.

1. Montrer que $A \subset E$ est une partie ouverte de $E$ par rapport à $N_1$ si et seulement si $A$ est ouvert par rapport à $N_2$.
2. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in E$ par rapport à $N_1$ si et seulement s'il en est de même par rapport à $N_2$.

**Exercice 3 (Ensembles finis)** Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé non nul.

1. Montrer que toute partie finie de $E$ est fermée et d'intérieur vide.
2. Trouver une partie infinie de $E$ qui est fermée et d'intérieur vide.

**Exercice 4 (Propriétés topologiques de parties de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)** Déterminer les propriétés topologiques des ensembles suivants. Sont-ils ouverts, fermés, compacts ? Déterminer leurs adhérences.

**Dans $\mathbb{R}$** Un intervalle fermé ; un intervalle ouvert ; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

**Dans $\mathbb{R}^2$** $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$ ; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0\}$.

**Dans $\mathbb{R}^3$** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z < 0\}$.

**Exercice 5 (La densité des rationnels)** On munit $\mathbb{R}$ de la norme valeur absolue. Quelle est l'adhérence $\mathbb{Q}$ dans la topologie induite par cette norme.

**Exercice 6 (Caractérisations séquentielles)** Montrer que si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$ qui converge vers $y \in E$, alors l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact.

**Exercice 7 (Convergence dans les espaces normés)**

1. Déterminer la limite de la suite suivante dans $\mathbb{R}^3$ : $\left( \sin\left(\frac{1}{n}\right), \cos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tan\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Munissez l'espace vectoriel des matrices $3 \times 3$ à entrées réelles $(\mathcal{M}_{3\times3}(R))$ d'une norme. Calculer la limite de la suite $(A^n/(-4)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cet espace. *(On peut penser à diagonaliser $A$ pour calculer ses puissances.)*
3. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de deux normes $N_1$ et $N_2$ en faisant les définitions suivantes : si $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ alors $N_1(P) = |a_0 + P'(1)| + \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ et $N_2(P) = \sup_{0\leq x\leq 1} |P(x)|$. Vérifier que ces fonctions définissent des normes. Déterminer ensuite la limite de la suite $(1 - X^n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par rapport à chacune des deux normes. Quelle est votre conclusion ?