
Fiche 3

Exercice 1 (La continuité par recollements)

1. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec $E = A \cup B$. On supposera A et B fermés. Soit $f : E \rightarrow F$ telle que la restriction de f à A et à B soient continues. Montrer alors que f est continue.
2. Montrer que la même conclusion reste vraie si on remplace la condition d'être fermé par celle d'être ouvert.
3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$ n'est pas continue en 0 et en déduire que les hypothèses sur A et B dans les parties précédentes sont essentielles.
4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ and $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de \mathbb{R} .

Exercice 2 (La continuité et la densité)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \rightarrow F$ surjective continue. Montrer que si $A \subset E$ est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F .

Exercice 3 (La "diagonale")

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que $\Delta = \{(y, y), y \in F\}$ est un fermé de $F \times F$.
2. Soient $f, g : E \rightarrow F$ continues. Montrer que

$$A = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de E .

3. Montrer que si f, g coïncident sur une partie A dense dans E alors $f = g$ sur E .

Exercice 4 (La continuité et la compacité) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ une application continue de E vers F , et $A \subset E$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ de E dans \mathbb{R} est continue.
2. Montrer que si A est compact, alors $f(A)$ est borné.
3. Montrer que le point précédent est faux si A n'est pas compact.

Exercice 5 (La continuité des applications linéaires) Soient (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. f est continue ;
2. f est continue en 0 ;
3. f est bornée sur la boule unité.

Déduire de cette équivalence que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.