ANALYSE COMPLEXE

Cours de L3-M1

Stephane ATTAL

Partie 1

SERIES ENTIERES, ANALYCITÉ, EXP-LOG COMPLEXES

1. Dérivation complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est <u>$\mathbb{C}$-dérivable</u> en $z_0 \in \Omega$ (ou plus simplement <u>dérivable</u> en z_0) si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On la note alors $f'(z_0)$.

La dérivabilité en z_0 est équivalente à

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \qquad (1.1)$$

Si f est dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$, on dit que f est <u>holomorphe</u> sur Ω.
On note <u>$H(\Omega)$</u> l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

De la même façon on peut définir le fait d'être C^k sur Ω, ou bien C^∞ sur Ω, ainsi que les dérivées successives $f^{(k)}(z_0)$.

Les fonctions $z \mapsto z^n$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, de dérivée $z \mapsto n z^{n-1}$.
La fonction $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée e^z.
La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est nulle part dérivable.

Notez que si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $x \in \mathbb{R}$, alors elle est $\mathbb{R}$-dérivable en x et les dérivées coïncident. L'inverse est faux : $z \mapsto \bar{z}$ est $\mathbb{R}$-dérivable sur tout $\mathbb{R}$, elle est nulle part $\mathbb{C}$-dérivable.

2. Rappels sur les séries entières

On rappelle qu'une série de la forme

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n} \quad , \ z \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in \mathbb{C} \qquad (1.2)$$

est appellée <u>série entière centrée en z_0</u>; elle admet un <u>rayon de convergence</u>

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}} \qquad (1.3)$$

qui est tel que la série converge absolument et uniformément sur toute $\overline{B}(z_0, r)$ telle que $r < R$, et diverge grossièrement hors de $\overline{B}(z_0, R)$.

<u>Théorème 1.1</u>

La serie entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ est C^∞ sur $D(z_0, R)$. Ses dérivées

$$\boxed{f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n \, (z-z_0)^{n-k}} \qquad (1.4)$$

ont même rayon de convergence que f.

Notez qu'on a alors

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad , \ n \in \mathbb{N}.} \qquad (1.5)$$

En particulier la série entière est déterminée de manière unique par les valeurs de $f(z)$ sur n'importe quel $D(z_0, \varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \leq R$.

<u>Dem</u>

Pour $r_1 < r_2 < R$ et $z \in \overline{D}(z_0, r_1)$ on a $n|a_n||z-z_0|^n \leq n|a_n| \frac{r_1^n}{r_2^n} r_2^n = n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n |a_n| r_2^n$.

La suite $|a_n| r_2^n$ est bornée car $\sum |a_n| r_2^n$ converge, la série $\sum_n n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$ converge. Donc $\sum_n n|a_n||z-z_0|^n$ converge normalement sur tout $\overline{D}(z_0, r)$ avec $r < R$.

Si $|z-z_0| = \rho > R$ alors $n|a_n||z-z_0|^n \geq |a_n| \rho^n$ et la série diverge grossièrement. On a montré que le RCV de $\sum_n n a_n (z-z_0)^n$ est R.

Si $z \in D(z_0, R)$, prenons r tel que $|z-z_0| < r < R$,

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \sum_n a_n \frac{(z+w-z_0)^n-(z-z_0)^n}{w} \qquad (\text{pour } w \text{ tq } z+w \in B(z_0,r))$$

Comme la série ci-dessus converge normalement sur $\bar{B}(z_0,r)$, on peut intervertir $\lim_{w\to 0}$ et $\sum_n$:

$$\lim_{w\to 0} \sum_n \frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \sum_n \lim_{w\to 0} a_n \frac{(z+w-z_0)^n-(z-z_0)^n}{w} = \sum_{n\geq 1} a_n\, n(z-z_0)^{n-1}.$$

On a montré le théorème pour la dérivée première. C'est facile ensuite d'itérer.

De la formule $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k}$ on tire $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$.

■

Théorème 1.2 (Inversion locale des séries entières)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ une série entière, centrée en z_0, de RCV $R_f > 0$. Si $a_1 \neq 0$ alors il existe une unique série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a_0)^n$, de RCV $R_g > 0$ et il existe $r > 0$ tel que $f\circ g(z) = z$ pour tout $z \in D(a_0, r)$. On a en particulier $b_0 = z_0$ et $b_1 = 1/a_1$. Il existe aussi $\rho > 0$ tel que $g\circ f(z) = z$ pour tout $z \in D(z_0,\rho)$.

Dem

Pour commencer on suppose $z_0 = a_0 = 0$. Ainsi $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

Quand on développe une expression de la forme $\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{m=1}^{M} b_m z^m\right)^n$ sous forme d'un polynôme $P_{N,M}(z)$ on remarque facilement que :

- les coeffs de degré k sont les mêmes $\forall N,M$ tq $N \wedge M \geq k$.
- ce coefficient fixé de z^k est de la forme $a_1 b_k + P_k(a_2,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{k-1})$ où P_k est un polynôme fixé, linéaire en les a_i, à coefficients ≥ 0

Si on veut que $P_{N,M}(z) = z +$ termes de degrés $\geq N\wedge M$, il faut et il suffit de prendre $b_1 = 1/a_1$, puis, par récurrence, quand $b_1,\dots,b_{n-1}$ sont fixés, trouver b_k par la relation

$a_1 b_k = -P_k(a_2,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{k-1})$. On fixe ainsi une suite unique $(b_n)_{n\geq 1}$.

Nous allons maintenant montrer que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ a un RCV $R_g > 0$.

Considérons la série $S(z) = A_1 z - \sum_{n\geq 2} A_n z^n$, où $A_1 = |a_1|$ et $A_n \geq |a_n|$, $n\geq 2$. On construit la suite (B_n) associée, comme ci-dessus. On a

$$B_1 = \frac{1}{A_1} = \frac{1}{|a_1|} = |b_1|.$$

$$A_1 B_2 = P_2(A_2, B_1) \geq P(|a_2|, |b_1|) \text{ car } P_2 \text{ est à coeff}^{\text{s}} \geq 0$$
$$\geq |P(a_2, b_1)|$$

Ainsi $B_2 \geq \dfrac{|P(a_2,b_1)|}{|a_1|} \geq \left|\dfrac{P(a_2,b_1)}{a_1}\right| = |b_2|$.

Par recurrence
$$A_1 B_n = P_n(A_2, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}) \geq P_n(|a_2|, \dots, |a_n|, |b_1|, \dots, |b_{n-1}|) \geq |P_n(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1})|$$
et finalement $B_n \geq |b_n|$.

En particulier, la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$ a un RCV inférieur à celui de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.
Si on montre qu'elle a un RCV >0 on a gagné!

On prend $r>0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, donc $\exists M$ tq $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \leq M$. On pose $A_1 = |a_1|$
et $\forall n \geq 2$, $A_n = \dfrac{M}{r^n} \geq |a_n|$. Alors $S(z) = A_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} M\left(\dfrac{z}{r}\right)^n = A_1 z - M \dfrac{z^2/r^2}{1 - z/r}$.

Cette fonction s'inverse en résolvant $z^2\left(\dfrac{A_1}{r} + \dfrac{M}{r^2}\right) - z\left(A_1 + y/r\right) + y = 0$, i.e.

$$y = \frac{A_1 + y/r - \sqrt{A_1^2 - 2A_1 y/r - 4My/r^2 + 2A_1 y/r}}{2\left(\frac{A_1}{r} + M/r^2\right)} \quad \text{(car la solution doit s'annuler en } y=0\text{)}.$$

La partie en $\sqrt{\ }$ s'écrit $A_1\sqrt{1-u}$ qui est DSE pour $|u|<1$, donc pour $|y|$ suffisamment petit.
Ainsi la série S admet une série réciproque T de RCV >0. On a $S \circ T(z) = z$ pour z suffisamment petit. En reprenant le raisonnement sur le degré des termes dans le développement de $S \circ T(z)$, on voit facilement que T est la série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$. Ainsi cette dernière a un RCV >0 et donc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ aussi, comme nous l'avons remarqué plus haut.

Soit $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, alors g est continue et $g(0)=0$, donc $\exists r>0$ tq $\forall z \in D(0,r)$ on ait
$|g(z)| < R_f$. La série composée $f \circ g(z)$ est bien définie.

Le coefficient de z^k dans $f \circ g$ est donné par le développement de l'expression $\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{m=1}^{M} b_m z^m\right)^n$
pour $N, M \geq k$. De plus, une somme du type $\sum_{n=\sqrt{k}+1}^{N} a_n \left(\sum_{m=\sqrt{k}+1}^{M} b_m z^m\right)^n$ ne comporte aucun terme de degré $\leq k$.
Ainsi, si on note $f_N(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n$, $g_M = \sum_{m=1}^{M} b_m z^m$, on a, pour $N \geq M$,

$$f_N \circ g_M(z) = z + (f_N - f_{\sqrt{M}}) \circ (g_M - g_{\sqrt{M}})(z).$$

On fait $N \to +\infty$: $f \circ g_M(z) = z + (f - f_{\sqrt{M}}) \circ (g_M - g_{\sqrt{M}})(z)$.
Il existe $r'>0$; $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| |z|^m\right)^n$ converge pour $|z|<r'$. On a dans ce cas

$$|(f - f_{\sqrt{M}}) \circ (g_M - g_{\sqrt{M}})(z)| \leq \sum_{n=\sqrt{M}}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{m=\sqrt{M}}^{M} |b_m| |z|^m\right)^n \leq \sum_{n=\sqrt{M}}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| |z|^m\right)^n.$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On a montré $f \circ g(z) = z \ \forall z \in D(0, r')$.

Maintenant, le cas général, si f est centré en z_0 et a_0 quelconque. On pose $h(z) = f(z+z_0) - a_0$, de sorte que h est DSE au voisin. de 0 et $h(0)=0$. On sait qu'il existe k DSE (0) tel que $h \circ k(z) = z$ sur un $D(0,r)$ pour un $r>0$. Alors $g(z) = k(z+a_0) - z_0$ est DSE(a_0) et vérifie $f \circ g(z) = z$ sur $D(a_0, r)$.

Pour la dernière partie, comme $b_1 = 1/a_1 \neq 0$ on peut appliquer le même raisonnement à g et trouver h DSE (z_0), ainsi que $\rho > 0$, tels que sur $D(z_0, \rho)$ on ait $g \circ h(z) = z$.

Quitte à diminuer ρ, on peut supposer $h(D(z_0,\rho)) \subset D(a_0, r)$ (celui qui autorise $f \circ g(z) = z$). On a alors $f \circ g \circ h(z) = f(z)$ et $f \circ g(h(z)) = h(z)$ donc $h = f$ sur $D(z_0, \rho)$. On a montré le théorème. ∎

Théorème 1.3 (Principe des zéros isolés)

Si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ est une série entière qui admet une suite (w_n) de zéros tels que : $w_n \neq 0 \ \forall n$ et $w_n \to 0$, alors $f \equiv 0$.

Dem

Soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$ (ça existe ssi $f \not\equiv 0$). On a alors $f(z) = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} z^n$. La série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} z^n$ a le même RCV que f. On a donc $f(w_n) = w_n^p g(w_n) \Rightarrow g(w_n) = 0$. Mais comme g est continue en 0, on a $a_p = g(0) = \lim_n g(w_n) = 0$. Ce qui contredit notre hypothèse. ∎

3. Fonctions analytiques

Soit $\mathcal{D}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est <u>analytique</u> sur $\mathcal{D}$ si pour tout $z_0 \in \mathcal{D}$ la fonction f est DSE au voisinage de z_0.

En vertu des propriétés bien connues des séries entières, on obtient facilement la liste de propriétés suivantes.

Théorème 1.4

i) Les fonctions analytiques sur $\mathcal{D}$ sont C^∞ sur $\mathcal{D}$ et ses dérivées successives sont toutes analytiques sur $\mathcal{D}$.

ii) L'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathcal{D}$ forme une algèbre.

iii) Si f est analytique sur $\mathcal{D}$, alors $\frac{1}{f}$ est analytique sur $\mathcal{D}$ privé des points z_0 tels que $f(z_0)=0$.

iv) Si f analytique sur $\mathcal{D}$, $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$ et g analytique sur $\mathcal{D}'$, alors $g \circ f$ est analytique sur $\mathcal{D}$.

v) Si f est analytique sur $\mathcal{D}$ connexe et si f possède une primitive g sur $\mathcal{D}$, alors cette primitive est unique à constante additive près et c'est une fonction analytique.

$\blacksquare$

Grâce au Théorème 1.2, nous allons aussi démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.5 (Inversion locale des fonctions analytiques)

Soit f une fonction analytique sur un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert V de z_0, contenu dans $\mathcal{D}$, et un voisinage ouvert W de $f(z_0)$ tels que $f_{/V}$ soit bijective de V dans W et sa fonction réciproque $g : W \to V$ soit analytique.

<u>Dem</u>

Avec le théorème 1.2 on a construit g DSE $(a_0 = f(z_0))$ et $r>0$ tel que $f\circ g(z) = z \quad \forall z \in D(a_0,r)$; ainsi que $\rho>0$ tq $g\circ f(z) = z \quad \forall z \in D(z_0,\rho)$.

Posons $V = D(z_0,\rho)$ et $W = g^{-1}(V) \cap D(a_0,r)$, c'est un voisin. ouvert de a_0.

On a $f(V) \subset W$ car si $z \in f(V)$, $z = f(v), v \in V$, alors $g(z) = g\circ f(v) = v \in V$, i.e $z \in g^{-1}(V)$. Mais $v \in D(z_0,\rho) \Rightarrow z = f(v) \in D(a_0,r)$. $\Rightarrow z \in W$.

On a aussi $W \subset f(V)$ car si $w \in W \Rightarrow g(w) \in V$ et $w \in D(a_0,r)$ donc $w = f\circ g(w) = f(g(w)) \in f(V)$.

Ainsi $W = f(V)$, $g(W) = V$ et $g_{/W} = f^{-1}_{/V}$.

$\blacksquare$

Théorème 1.6 (Principe des zéros isolés)

Soit f analytique sur $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors f est nulle sur $\mathcal{U}$.

Dem

S'il existe une suite (w_n) de zéros de f tq $w_n \to w \in \mathcal{U}$, $w_n \neq w$, alors la fonction $g(z) = f(z+w)$ est DSE au vois. de 0, disons sur $D(0,R)$ et elle s'annule en $z_n = w_n - w \neq 0$ $\to 0$.

Donc par le Théorème 1.3, on a $g(z) = 0$ sur $D(0,R)$, i.e. $f = 0$ sur $D(w,R)$.

Soit V l'ens. des zéros non isolés de f. Si $w \in V$, on a vu que tout point d'un $D(w,R)$ est dans V. Donc V est ouvert. Si $(z_n) \subset V$ avec $z_n \to z \in \mathcal{U}$, alors on a vu que $z \in V$ aussi, donc V est fermé dans $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est connexe $\Rightarrow V = \mathcal{U}$ (car $V \neq \emptyset$) $\Rightarrow f \equiv 0$ sur $\mathcal{U}$.

Les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier sont appelées fonctions entières.

4. Exponentielle complexe

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

C'est une fonction entière. On note aussi e^z. Quand $z \in \mathbb{R}$, c'est la fonction exp. usuelle.

Théorème 1.7

1) La fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle vérifie $f' = f$.

2) La fonction exp est un morphisme de groupe : $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$.

3) La fonction exp est surjective sur $\mathbb{C}^*$.

4) La fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \exp(ix) \end{array}$ est 2π-périodique, à valeurs dans le cercle unité, surjective.

La fonction exp. est $2i\pi$-périodique.

Dem

1) est évident.

2) $\displaystyle\sum_n \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{z_2^{k_2}}{k_2!}\right).$

Ainsi $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On ne peut pas avoir $e^{z_0}=0$, car sinon $e^{z_0+z} = e^{z_0}e^{z} = 0$ pour tout z; i.e. $\exp \equiv 0$, ce qui n'est pas le cas.

3) On pose $G = \exp(\mathbb{C})$. C'est donc un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$.
Montrons que G est d'intérieur non vide. Comme $\exp'(0) = \exp(0) = 1 \neq 0$, par le théorème d'inversion locale analytique, il existe un voisin. ouvert $\mathcal{U}$ de 0 et un voisin. ouvert $\mathcal{V}$ de 1 telle que $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijection. Donc $\mathcal{V} \subset G$ et G est d'intérieur non vide.
On montre maintenant que G est ouvert. Si $b = \exp(a) \in G$, alors $a + \mathcal{U}$ est un ouvert et $\exp : a+\mathcal{U} \to b\mathcal{V}$ est un homéomorphisme. En particulier $b\mathcal{V}$ est ouvert, c'est un voisin. ouvert de b. On a montré que G est ouvert.
Mais G est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, nous allons montrer qu'il est fermé : les classes zG, $z \in \mathbb{C}^*$ sont soit égales, soit disjointes, elles partitionnent $\mathbb{C}^*$; elles sont des ouverts chacunes, on a $G^c = \bigcup_{z\notin G} zG$ qui est ouvert, donc G est fermé.
Le groupe G est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}^*$ connexe, donc $G = \mathbb{C}^*$.

4) $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$.
$e^{ib}e^{-ib} = e^0 = 1$, donc $|e^{ib}|^2 = 1$, i.e. $|e^{ib}| = 1$.
$|e^{a+ib}| = e^a |e^{ib}| = e^a$, donc $|e^z| = 1 \iff \operatorname{Re} z = 0$.
Donc $e^{i\mathbb{R}} =$ cercle unité (car exp. est surjective).
On pose $\cos(x) = \operatorname{Re} e^{ix}$ et $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}} i\,\frac{e^{ix+ih} - e^{ix}}{ih} = i\exp'(ix) = ie^{ix}.$$

Donc $\begin{cases} \cos'(x) = -\sin x \\ \sin'(x) = \cos x \end{cases}$

$\cos(0) = 1$, $\cos(2) < 0$ par le DSE de cos (obtenu comme $\operatorname{Re}(e^{ix})$)
donc cos s'annule entre 0 et 2. On note $\pi/2$ le plus petit zéro, i.e. le min. de l'ens. fermé $\{x \in \mathbb{R}^{*+} / \cos x = 0\}$. Comme $|e^{i\pi/2}| = 1$, que $\sin \geq 0$, $\nearrow$ entre 0 et $\pi/2$ $\Rightarrow \sin \pi/2 = 1$
$\Rightarrow e^{i\pi/2} = i \Rightarrow e^{2i\pi} = 1$. Ainsi exp est $2i\pi$ périodique.
A cause des variations de cos et sin, c'est la plus petite période possible. □

5) Logarithme complexe

Puisque exp est surjective $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$. Un tel w est appelé un logarithme de z. Il n'est pas unique, contrairement au cas réel.

On a donc $\exp(\mathrm{Re}(w)) = |z|$ et $\exp(\mathrm{Im}\, z) = z/|z|$ et ainsi

$$w = \ln|z| + i\theta$$

où θ est un argument de z. Les logarithmes de z se déduisent les uns des autres par addition d'une constante $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^*$, une détermination continue du logarithme est une fonction $\ln : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ qui est continue sur $\mathcal{U}$ et telle que $\forall z \in \mathcal{U}$, $\ln(z)$ est un logarithme de z.

Proposition 1.8

Sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^*$, si f est une détermination continue du log., alors toute autre détermination continue g vérifie $f = g + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dem

La fonction $\dfrac{f-g}{2ik\pi}$ est à valeurs entière et continue sur $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est connexe, alors elle est constante. ∎

Proposition 1.9

Au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}^*$ il existe une détermination analytique du log.
Sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^*$ toute détermination continue du log est analytique sur $\mathcal{U}$.

Dem

La fonction exp est analytique sur $\mathbb{C}$ et surjective dans $\mathbb{C}^*$, sa dérivée ne s'annule jamais. Donc par le théorème d'inversion locale analytique il existe une version analytique du log au voisin. de tout point de $\mathbb{C}^*$.

Soit ℓ une détermination continue du log. sur $\mathcal{U}$ ouvert connexe. Pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe un $D(z,r) \subset \mathcal{U}$ et une détermination analytique ℓ_z du log sur $D(z,r)$. On a donc $\ell - \ell_z = 2ik\pi$ et ℓ est analytique sur $D(z,r)$. Comme c'est vrai au voisin. de tout $z \in \mathcal{U}$, cela prouve que ℓ est analytique sur $\mathcal{U}$. ∎

Si on fait le choix de prendre sur $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ la détermination principale de l'argument :

$$\operatorname{Arg}_p(z) \in]-\pi, \pi[,$$

on obtient la détermination principale du log :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{C} \\ \ln z = \ln|z| + i \arg_p(z) \end{array}}$$

Notez que la relation $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$ n'est plus vraie en général, quelque soit la détermination continue du log. En effet, pour la détermination principale on a : $\ln(e^{2i\pi/3}) = 2i\pi/3$, mais $\ln(e^{4i\pi/3}) = -i\pi/3$. Si on change de détermination continue on ajoute $2ik\pi$, ce qui ne change rien au problème.

Proposition 1.10

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, la série entière

$$\ln(z) = \ln|z_0| + i \arg_p(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n$$

est la détermination principale du log sur $D(z_0, |z_0|)$.

Dem

Notons $S(z)$ la série ci-dessus. Son rayon de convergence est $|z_0|$, elle converge donc sur $D(z_0, |z_0|)$. Sur l'intervalle réel $]z_0 - |z_0|, z_0 + |z_0|[$ elle coïncide avec le développement usuel de $\ln$ réel. La fonction $\exp \circ S$ est analytique sur $D(z_0, |z_0|)$ et elle coïncide avec la fonction Id sur $]z_0 - |z_0|, z_0 + |z_0|[$. Cet intervalle admet un point d'accumulation, donc $\exp \circ S$ coïncide avec Id sur $D(z_0, |z_0|)$ (Théorème 1.6). Ainsi S est une détermination analytique du log. sur $D(z_0, |z_0|)$. En z_0 elle coïncide avec la détermination principale, donc c'est la détermination principale.

∎

Avec la détermination principale $\ln$ du log. vient une définition de la fonction puissance : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose

$$\boxed{z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}.}$$

Par exemple : $i^i = e^{-\pi/2}$.

Proposition 1.11

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ continue. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1) ℓ est une primitive de $1/z$ sur $\mathcal{U}$.

2) ℓ est une détermination continue du log sur $\mathcal{U}$, à une constante additive près.

Dem

Si f est une détermination continue du log sur $\mathcal{U}$ ouvert connexe, alors elle est analytique (Proposition 1.9). Comme $e^{f(z)} = z$, en dérivant on a $f'(z)e^{f(z)} = 1$, i.e. $f'(z) = 1/z$.

Inversement, si ℓ est une primitive de $1/z$ sur $\mathcal{U}$. Considérons $z_0 \in \mathcal{U}$ et écrivons

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{z_0} - 1} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{z_0} - 1\right)^n, \text{ sur } D(z_0, |z_0|).$$

En prenant la primitive :

$$\ell(z) = \ell(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z}{z_0} - 1\right)^n.$$

Ainsi $\ell(z) - \ell(z_0) = \ln(z) - \ln(z_0)$.

∎

6) Les fonctions trigo et hyperboliques sur $\mathbb{C}$.

On définit sur $\mathbb{C}$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

De sorte que :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\operatorname{sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

De sorte que :

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch}(z) = \cos(iz)$$

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh}(z) = -i \sin(iz)$$

Partie 2

FONCTIONS HOLOMORPHES

1) Différentiation complexe

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pour $z_0 \in \Omega$ on dit que f est dérivable en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe. Cette limite est notée $f'(z_0)$.

Si f est dérivable en tout $z_0 \in \Omega$, on dit que f est holomorphe sur Ω.
On note $H(\Omega)$ l'ens. des fonctions holomorphes sur Ω.

Notez que cette dérivabilité en z_0 est équivalente à

$$\boxed{f(z) = f(z) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).} \qquad (1)$$

Si on assimile $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (\mathrm{Re}\, f(x+iy), \mathrm{Im}\, f(x+iy)) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

alors f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0)

et
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}} \qquad \text{(Condition de Cauchy-Riemann)} \quad \text{(cf T.D.)}$$

Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on l'a vu, peut être vue comme fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en les (x,y).
Mais comme $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = -i\,\dfrac{z - \bar{z}}{2}$, on peut voir aussi f comme fonction de $(z, \bar{z})$:

$$f(x,y) = f \circ P(z, \bar{z}) = g(z, \bar{z}).$$

où $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Inversement, $g(z,\bar{z}) = g \circ P^{-1}(x,y) = f(x,y)$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$)

Pour $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0,y_0)}{h} \in \mathbb{C}$$

On écrit $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ en lieu et place de $\frac{\partial g}{\partial x}(z_0, \bar{z}_0)$. Ce qui revient à

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \end{aligned}}$$

La condition de Cauchy-Riemann est équivalente à

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0}$$

<u>Proposition 2.1</u>

- Si $f, g \in H(\Omega)$, alors $f+g$ et $fg \in H(\Omega)$
- Si $f \in H(\Omega)$ et $g \in H(\Omega_1)$ avec $f(\Omega) \subset \Omega_1$, alors $h = g \circ f \in H(\Omega)$ et $h'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.
- La dérivabilité en z_0 entraine la continuité en z_0.

facile, idem que le cas réel, à partir de (1)

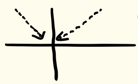
<u>Exemples</u> : $f(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$, $f'(z) = n z^{n-1}$

$f(z) = \frac{1}{z} \in H(\mathbb{C}^*)$, $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$

$f(z) = e^z \in H(\mathbb{C})$, $f(z) = e^z$

Par contre $f(z) = \bar{z}$ est dérivable en aucun point.

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{h}}{h} \quad \text{où } z = z_0 + h$$
$$= e^{-2i\theta(h)}$$



Résultats différents.

On rappelle qu'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ a un rayon de convergence

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup_n |c_n|^{1/n}}} \; ;$$

que la série conv unif. sur $\bar{D}(a,r)$ pour tout $r<R$ et diverge grossièrement hors de $\bar{D}(a,R)$.

On dit que f est <u>DSE</u> sur Ω si $\forall a \in \Omega$, $\exists \bar{D}(a,r)$ tq $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ sur $\bar{D}(a,r)$.

<u>Théorème 2.2</u>

Si f est DSE sur Ω alors $f \in H(\Omega)$ et f' est aussi DSE sur Ω.
De plus si $f(z) = \sum_n c_n (z-a)^n$ sur $\bar{D}(a,r)$, alors $f'(z) = \sum_n n c_n (z-a)^{n-1}$ sur $\bar{D}(a,r)$.

(classique, L2)

On peut itérer et voir que $f^{(k)}(z) = \sum_n n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$.

<u>Théorème 2.3</u>

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesurable, soit $\varphi : X \to \mathbb{C}$ mesurable, soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas $\varphi(X)$. Alors la fonction

$$f(z) = \int_X \frac{1}{\varphi(\omega) - z} \, d\mu(\omega)$$

est D.S.E. sur Ω.

<u>Dem</u>

Soit $D(a,r) \subset \Omega$, on a $\left| \frac{z-a}{\varphi(\omega)-a} \right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$ pour $z \in D(a,r)$, $\omega \in X$.

La série $\sum_n \frac{(z-a)^n}{(\varphi(\omega)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(\omega)-z}$ conv. unif sur X pour tout $z \in D(a,r)$.

Donc $\int_X \frac{1}{\varphi(\omega)-z} \, d\mu(\omega) = \sum_n c_n (z-a)^n$ avec $c_n = \int_X \frac{1}{(\varphi(\omega)-a)^{n+1}} \, d\mu(\omega)$. ∎

2) Intégration sur des chemins

Soit X un espace topologique. Une courbe dans X est une application continue $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$. On note γ^* l'image de γ.

si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ on dit que γ est une courbe fermée.

Un chemin est une courbe C^1 par morceaux.

Soit γ un chemin et f continue sur γ^*, on pose

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$

Si φ est une application C^1, bijective : $[\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ avec $\varphi(\alpha_1) = \alpha$ et $\varphi(\beta_1) = \beta$, alors $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ est aussi un chemin de même image $\gamma_1^* = \gamma^*$. On a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma\circ\varphi(t))\,\gamma'\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

L'intégrale de f sur γ ne dépend que de l'image γ^*, pas du paramétrage ... à condition qu'il respecte le sens de parcours (i.e. φ croissante).

Si on prend $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $t \mapsto 1-t$; si on pose $\gamma_1 = \gamma\circ\varphi$, alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = -\int_0^1 f(\gamma(1-t))\,\gamma'(1-t)\,dt = -\int_0^1 f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Notez que $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \|f\|_{\infty,\gamma^*} \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt = \mathrm{Long}(\gamma)\,\|f\|_{\infty,\gamma^*}.$

Théorème 2.4

Soit γ un chemin fermé et $\Omega = \mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Si on définit

$$\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}, \quad z \in \Omega}$$

alors Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω, constante sur chaque composante connexe de Ω et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ

Dem

γ^* est compact, il est donc contenu dans un disque borné D dont le complémentaire D^c est connexe. Donc D^c est inclus dans une des composantes connexe de Ω. Cela montre que Ω n'a qu'une seule comp. conn. non bornée.

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds \qquad (2.1)$$

Pour un complexe ω, la quantité $\frac{\omega}{2i\pi}$ est entière ssi $e^\omega = 1$. En posant

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right),$$

nous allons montrer que $\varphi(\beta) = 1$.

On a $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ sauf sur un nbr fini de points où γ n'est pas dérivable.

La fonction $\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ est continue sur $[\alpha,\beta]$ et de dérivée nulle sur $[\alpha,\beta]$ sauf un nbr fini de points. Elle est donc constante sur $[\alpha,\beta]$. En particulier $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha) = 1$. On a montré que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est entier.

D'après le théorème 2.3 on a $\mathrm{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$. L'image continue d'un connexe étant connexe, Ind_γ doit être constant sur chaque composante connexe de Ω.

On voit sur la formule (2.1) que $|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < 1$ pour $|z|$ suffisamment grand. Cela montre que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ sur la composante non bornée.

Théorème 2.5

Si γ est le cercle de centre a et de rayon r, parcouru positivement, alors

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r. \end{cases}$$

Dem

Par le théorème précédent on sait déjà que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ pour $|z-a| > r$.

On sait aussi que, pour $|z-a| < r$, on a $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)$. Calculons $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{w-a}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}\, ire^{it}\,dt = 1.$$

∎

En fait, si on écrit $\varphi(t)-z = r(t)e^{i\varphi(t)}$ où $\varphi(t)$ suit la phase continuement (à valeurs dans $\mathbb{R}$)

alors $\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} = \dfrac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)$ et donc $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right]$.

L'indice c'est le nbr de tours (algébrique)

Si on écrit $\varphi(t)-z = r(t)e^{i\varphi(t)}$ (avec φ pris dans $\mathbb{R}$, de classe C^1), alors

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-z} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) = \ln(r(t))' + i\varphi'(t).$$

Donc $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)$

L'indice c'est le nombre algébrique de tours que fait γ autour de z.

3) Le théorème de Cauchy

Théorème 2.6

Si $f\in H(\Omega)$ et f' continue sur Ω, alors

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$$

pour tout chemin fermé $\gamma\subset\Omega$.

Dem

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

$\blacksquare$

Corollaire 2.7

Si $n\in\mathbb{N}$ et γ un chemin fermé, alors $\int_\gamma z^n\,dz = 0$.

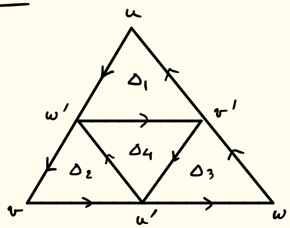
Si $n\in\mathbb{N}\setminus\{-1\}$ et γ un chemin fermé tel que $0\notin\gamma^*$, alors $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz = 0$.

Théorème 2.8 (Thm de Cauchy pour les triangles)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\Delta = \Delta(u,v,w)$ un triangle plein contenu dans Ω. Soit $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Soit $\gamma = \partial\Delta$ orienté positivement. Alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Dem



Cas 1 : si $a \notin \Delta$

Soit $L = \text{long}(\gamma)$ et $d = \text{diam}(\Delta)$. Soit $I = \int_\gamma f(z)\,dz$, alors

$$I = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz.$$

Il existe donc un Δ_j, disons Δ_1, tel que $\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4}|I|$

Si on recommence la division sur Δ_1, on obtient une suite de triangles $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n$ tels que :

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4^n}|I|, \quad \text{long}(\partial\Delta_n) = \frac{L}{2^n}, \quad \text{diam}(\Delta_n) = \frac{d}{2^n}.$$

On a une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, donc $\bigcap_n \Delta_n = \{z_0\}$.

(en effet : $\bigcap_n \Delta_n \neq \emptyset$ car en prenant $z_n \in \Delta_n \ \forall n \Rightarrow \forall n,m \geq p \ |z_n - z_m| \leq \Delta_p$, la suite est de Cauchy, elle converge vers un z. Ce $z \in \Delta_p \ \forall p$, car $(z_n)_{n\geq p} \subset \Delta_p$, $\Rightarrow z \in \Delta_p \ \forall p$.

$\bigcap_n \Delta_n$ ne peut pas contenir 2 points $\neq$ sinon le diamètre est $\geq |z - z'|$.)
$z \neq z'$

Par hypothèse $z_0 \neq a \Rightarrow f$ est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z)(z-z_0).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et n tq $|\varepsilon(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in \Delta_n$. On a

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz$$

$$= \int_{\partial\Delta_n} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz \text{ par le théorème 2.6.}$$

Ainsi

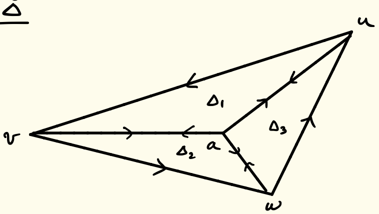
$$\frac{1}{4^n}|I| \leq \|\varepsilon(z)(z-z_0)\|_{\infty,\partial\Delta_n} \operatorname{long}(\Delta_n) \leq \varepsilon \frac{d}{2^n}\frac{L}{2^n}.$$

Ce qui donne $|I| \leq \varepsilon d L$ et $I = 0$.

<u>Cas 2 : $a \in \partial\Delta$</u>

On prend Δ_α l'homothétique de Δ, de rapport $\alpha < 1$ et de même barycentre que Δ. Alors $a \notin \Delta_\alpha$ et donc $\int_{\partial\Delta_\alpha} f(z)\,dz = 0$. Par passage à la limite $\alpha \to 1^-$ on trouve $I = 0$ (facile à justifier)

<u>Cas 3 : $a \in \mathring{\Delta}$</u>



$$I = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\Delta_i} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{3} 0 = 0.$$

<u>Théorème 2.9</u> (Théorème de Cauchy convexe)

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, soit $a \in \Omega$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Alors

1) La fonction f admet une primitive F, i.e. $F \in H(\Omega)$ et $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$

2) On a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour toute courbe fermée d'image $\gamma^* \subset \Omega$.

Dem

Comme Ω est convexe, on peut définir

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw, \qquad z \in \Omega.$$

Soit $z \in \Omega$ et $z+h \in \Omega$; le triangle $(a, z, z+h)$ est inclus dans Ω, on a donc (Thm 2.8)

$$\int_{[a,z]} f(w)\,dw + \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw + \int_{[z+h,a]} f(w)\,dw = 0,$$

ce qui donne $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)\,dw$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $|z-w| \leq \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$. Si $0 < |h| < \delta$ on a

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon.$$ On a montré 1).

La partie 2) découle maintenant du Thm 2.6. ∎

Théorème 2.10 (Thm de Cauchy local)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, de bord γ orienté positivement et paramétré par $a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Soit $f \in H(\Omega)$, alors

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw}, \quad \forall z \in D(a,r).$$

Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw}, \quad \forall z \in D(a,r)$$

Les fonctions holomorphes sur Ω sont analytiques sur Ω. Le D.S.E de f autour de a est valable sur tout $D(a,r) \subset \Omega$.

Dem

Soit $R > r$ tel que $\Omega_1 : D(a,R) \subset \Omega$, soit $z \in D(a,r)$. Soit $g = g_z : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{si } w \neq z \\ f'(z), & \text{si } w = z. \end{cases}$$

La fonction g est continue sur Ω_1, holomorphe sur $\Omega_1 \setminus \{z\}$. De plus Ω_1 est convexe. On a donc (Thm 2.9)

$$0 = \int_\gamma g(w)\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw, \text{ ou encore}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = f(z) \quad \text{pour } z \in D(a,r).$$

Du coup

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)}\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}\,dw$$

On a $|w-a| = r$, pour $w \in \gamma^*$, $|z-a| < r$, d'où

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n$$

avec $c_n(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw.$

∎

Théorème 2.11

Soit Ω un ouvert connexe et soit $f \in H(\Omega)$. Posons

$$Z(f) = \{a \in \Omega \,/\, f(a) = 0\}.$$

alors ou bien $Z(f) = \Omega$, ou bien $Z(f)$ n'a aucun point d'accumulation dans Ω. Dans ce dernier cas, il correspond à chaque $a \in Z(f)$ un entier m unique tq

$f(z) = (z-a)^m g(z)$, $z \in \Omega$

avec $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$. De plus $Z(f)$ est au plus dénombrable.

a est un pôle de f d'ordre m

Dem

Soit A l'ens. des pts d'accumulation de $Z(f)$. Comme f est continue alors $A \subset Z(f)$.
Soit $a \in Z(f)$ et $D(a,r) \subset \Omega$. On sait que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad , \quad z \in D(a,r).$$

Si tous les c_n sont nuls, alors $D(a,r) \subset A$ et $a \in \mathring{A}$.
Sinon, soit m le plus petit entier tq $c_m \neq 0$ ($m > 0$ car $f(a) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$).

Dans ce cas, on pose

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & , z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & , z = a. \end{cases}$$

Clairement $f(z) = (z-a)^m g(z)$, mais aussi $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On a

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z-a)^k \Rightarrow g \in H(D(a,r)) \Rightarrow g \in H(\Omega).$$

On a $g(a) \neq 0 \Rightarrow g$ ne s'annule pas sur un vois. de a. Ainsi a est un point isolé de $Z(f)$.

Si $a \in A$ c'est le premier cas qui se produit. Donc A est ouvert. Mais vue la déf. de A comme ens. de pts d'accumulation, il est facile de voir que A^c est ouvert. Comme Ω est connexe $\Rightarrow A = \Omega$ ou bien $A = \emptyset$.

Si $A = \emptyset$, alors $Z(f)$ n'a qu'un nbr fini de pts dans chaque compact de Ω. Mais comme Ω est σ-compact, $Z(f)$ est au plus dnb. ∎

Corollaire 2.12

Si f, g holomorphes sur Ω ouvert connexe et si $f(z) = g(z)$ pour tout z dans un ens. qui a un pt limite dans Ω, alors $f = g$ sur Ω.

Théorème 2.13

Soit Ω ouvert connexe et $a \in \Omega$. Pour $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ un des trois cas suivants peut se produire :

i) a est une <u>singularité artificielle</u> pour f, i.e. f se prolonge en une fonction $H(\Omega)$.

ii) a est un <u>pôle d'ordre m</u> si $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} \in H(\Omega)$ $(c_m \neq 0)$

iii) $\forall r > 0$ tq $D(a,r) \subset \Omega$, on a $f(D^*(a,r))$ dense dans $\mathbb{C}$. On parle de <u>singularité essentielle</u>.

(Non démontré).

4) Liouville, maximum, etc

Théorème 2.14

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ sur $D(a,R)$ et si $0 < r < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

Dem

$$f(a+re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

Cette série cv unif sur $[-\pi,\pi]$ pour $r<R$. Donc $c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

et on applique Parseval.

∎

Théorème 2.15 (Liouville)

Toute fonction entière bornée est constante.

Dem

D'après Thm 2.14 on aurait $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq M$ $\forall r > 0$. Impossible sauf $c_n = 0$ $\forall n \geq 1$.

∎

Théorème 2.16 (Principe du maximum)

Soit Ω ouvert connexe, $f \in H(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Alors ou bien f est constante sur Ω, ou bien tout voisin. de a contient b tq $|f(a)| < |f(b)|$.

Dem

Si $\exists R > 0$ tq $D(a,R) \subset \Omega$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$ $\forall z \in D(a,R)$. Par le Thm 2.14. on a

$$\sum_n |c_n|^2 r^{2n} \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2 \quad \forall\, 0 \leq r < R.$$

$\Rightarrow c_i = 0$ $\forall i \geq 1$ $\Rightarrow f(z) = f(a)$ dans $D(a,R)$. Donc $f(z) = f(a)$ dans tout Ω car $D(a,R)$ contient un point d'accumulation.

∎

Théorème 2.17

Si $f \in H(D(a,R))$ et $|f(z)| \leq M$ sur $D(a,R)$, on a les estimations

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\, M}{R^n} \quad \forall n.$$

Dem

On $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq M^2 \Rightarrow |c_n|^2 \leq \frac{M^2}{r^{2n}} \quad \forall r < R$

$$\text{i.e. } \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}.$$

$\blacksquare$

Prenons $a=0$, $f(z)=z^n$, $R=1$. On a $M=1$ et $f^{(n)}(0)=n!$

L'estimation ci-dessus ne peut pas être améliorée.

Partie 3

Théorème des résidus

1) Fonctions méromorphes

Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, soit $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est une <u>singularité effaçable</u> (ou <u>fausse singularité</u>) pour f s'il existe $g \in H(\Omega)$ tel que $f = g$ sur $\Omega \setminus \{a\}$. (g est un prolongement holomorphe de f).

Par exemple $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

On dit que a est un <u>pôle d'ordre m</u> pour f s'il existe des scalaires $c_{-1}, \dots, c_{-m}$ (forcément uniques) tq $c_{-m} \neq 0$ et $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ a une singularité effaçable en a.

($\Leftrightarrow$ $(z-a)^m f(z)$ admet un prolongement holomorphe en a, avec $g(a) \neq 0$)

Le terme $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ est la <u>partie principale</u> de f au point a, le coefficient c_{-1} s'appelle le <u>résidu</u> de f en a, noté <u>$\mathrm{Res}(f, a)$</u>.

Si une singularité est ni effaçable, ni un pôle, on dit que c'est une <u>singularité essentielle</u> (par exemple $e^{1/z}$).

On dit que f est <u>méromorphe</u> sur Ω s'il existe un sous-ensemble $A \subset \Omega$ tq

1) A n'a que des points isolés dans Ω
2) $f \in H(\Omega \setminus A)$
3) f a un pôle en chaque point de a.

Par exemple: $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1 (Riemann)

Si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ et si f est bornée sur $V \setminus \{a\}$ où V est un voisi. de a, alors a est une singularité effaçable.

Dem

Posons $h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$. Alors $\dfrac{h(z) - h(a)}{z-a} = (z-a) f(z) = O(z-a)$

donc h est dérivable en a et $h'(a) = 0$.

Donc h est analytique au voisi. de a et admet un $DSE(a)$:

$$h(z) = \sum_{n=2} c_n (z-a)^n.$$

Donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n$, etc. ∎

Proposition 3.2

Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Alors a est un pôle ssi $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.

L'ordre de a est alors la multiplicité de a comme 0 de $1/f$.

Si $f \in H(\mathbb{C})$ et $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty$, alors f est un polynôme.

Dem

Si a est un pôle d'ordre m alors $(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots$, donc pour r suffisamment petit $|f(z)|\,|z-a|^m \geqslant \dfrac{|c_{-m}|}{2}$, $|z-a| \leq r$.

D'où $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$.

Inversement, si $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$, alors $\exists\, D = D(a, r)$ tq f ne s'annule pas, sauf en a.

La fonction $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ tend vers 0 en a, elle a donc une singularité effaçable en a. De plus g n'a pas d'autre zéro dans D. Si m est la multiplicité de a pour g, alors

$$g(z) = a_m (z-a)^m + a_{m+1} (z-a)^{m+1} + \cdots$$

Ainsi $g(z) = a_m (z-a)^m h(z)$ avec $h \in H(D)$ et $h(a) = 1$.

Donc $1/h$ est holom. sur un vois. de a et

$$f(z) = \frac{1}{a_m (z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$$

Enfin, si $f(z) = \sum_n a_n z^n \underset{\infty}{\longrightarrow} \infty$. Soit $g(z) = f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, alors $g \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ et $\lim_{z \to 0} |g(z)| = \infty$. Donc 0 est un pôle pour g et donc tous les a_n sont nuls sauf un nbr fini. ∎

2) Théorème des résidus

Théorème 3.3

Soit f méromorphe sur Ω et A l'ens. de ses pôles. Soit γ une courbe fermé dans Ω, ne rencontrant pas A. Alors

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{a \in A} \mathrm{Ind}(\gamma, a) \, \mathrm{Res}(f, a)}$$

Proposition 3.4

Si $f = \frac{g}{h}$ avec g, h holomorphes au vois(a), avec a zéro simple de h et avec $g(a) \neq 0$, alors

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Dem

Comme a est pôle simple, on cherche $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$. ∎

Théorème 3.5 (Kronecker)

Soit f holomorphe sur Ω, non identiquement nulle ; soit γ courbe fermée simple dans Ω, qui ne rencontre pas les zéros de f. Soit $Z(f)$ le nbr de zéros de f, comptés avec multiplicité, à l'intérieur de γ. Alors

$$Z(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$$

Dem

$\frac{f'}{f}$ est méromorphe et $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = k$ la multiplicité de a ; en effet,

$f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'}{g}$ avec $\frac{g'}{g} \in H(\text{vois}(a))$. ∎

Théorème 3.6 (Rouché)

$f, g \in H(\Omega)$, γ cycle, tels que

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma^*.$$

Alors $Z(f) = Z(f+g)$.

Dem

$f_t(z) = f(z) + t g(z)$ $(t \in [0,1])$. Ainsi f_t ne s'annule pas sur γ^*. Donc Kronecker

$\Rightarrow Z(f_t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^*} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} \, dz$

$\Rightarrow t \longmapsto Z(f_t)$ est continue, à valeurs entières, donc constante. Donc $Z(f_0) = Z(f_1)$. ∎

Calculs d'intégrales

- $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+e^{it}+e^{-it}} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\,dt}{3e^{it}+e^{2it}+1} = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{1}{z^2+3z+1}\,dz$$

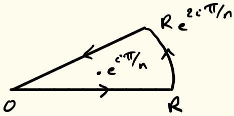
Pôles $= \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_-) = 0$, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_+) = 1$

$$\mathrm{Res}(f, z_+) = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z^2+3z+1}\,dz = \frac{2i\pi}{\sqrt{5}}$$

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

- $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\,dt$$ pôles $= e^{(2k+1)i\pi/n}$



$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^n}\,dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/n}) = 2i\pi \frac{1}{n z_0^{n-1}} = -2i\pi \frac{z_0}{n}$$

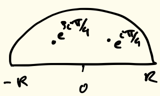
$$\int_0^R \frac{1}{1+t^n}\,dt + \underbrace{\int_{Re^{2i\pi/n}}^0 \frac{1}{1+t^n}\,dt}_{s = \frac{t}{e^{2i\pi/n}}} + \int_\gamma \frac{1}{1+z^n}\,dz$$

$$\gg \int_R^0 e^{2i\pi/n} \frac{1}{1+s^n}\,ds$$

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{1+z^n}\right| dz \leq L(\gamma) \sup_\gamma \frac{1}{|1+z^n|} \leq \pi R \frac{1}{R^n-1}$$

$$(1-e^{2i\pi/n})\, I = -2i\pi \frac{z_0}{n} \qquad I = \frac{2i\pi}{n} \frac{e^{i\pi/n}}{e^{2i\pi/n}-1} = \frac{2i\pi}{n} \frac{1}{2i\sin \pi/n} = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}.$$

- $$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^4}\,dt \qquad \int_\gamma \frac{e^{-izx}}{1+z^4}\,dz = 2i\pi\left[\mathrm{Res}(e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(e^{3i\pi/4})\right]$$



$$\frac{e^{-ix\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}}{4 z_0^3} = e^{x/\sqrt{2}}$$