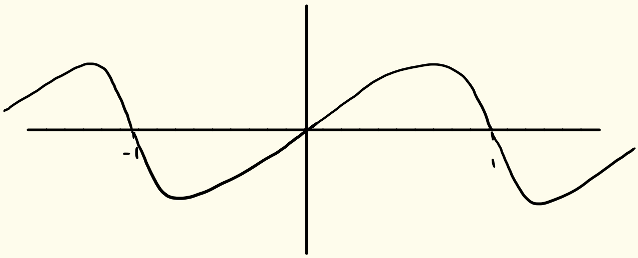
CORRIGÉ DU CC1

Exercice 1 — 9 pts

a) Dérivée $1-3x^2$: pente $=-2$ en -1 et 1, pente $=1$ en 0, dérivée nulle en $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$



(1)

b) $g(x) = f(x/\pi) = \frac{x}{\pi} - \frac{x^3}{\pi^3}$. Impaire $\Rightarrow$ que des b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-\frac{x^3}{\pi^3}\right)\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\cancel{\left[-\left(\frac{x}{\pi}-\frac{x^3}{\pi^3}\right)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{3x^2}{\pi^3}\right)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\cancel{\left[\left(\frac{1}{\pi}-\frac{3x^2}{\pi^3}\right)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{6x}{\pi^3}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{-6}{n^3\pi^4}\left[x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \cancel{\frac{6}{n^3\pi^4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}$$

$$= \frac{-12(-1)^n}{n^3\pi^3} = \boxed{\frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}}$$ (2)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\sin nx \Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)}$$ (1)

c) f est C^1 donc par Dirichlet on a CVS vers f. On a même CVN et CVU.
f est L^2, on a CV L^2. (1)

d) Parseval : $$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{144}{n^6\pi^6} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-\frac{x^3}{\pi^3}\right)^2 dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{72}\cdot\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3\pi^2}+\frac{x^7}{7\pi^6}-\frac{2}{5}\frac{x^5}{\pi^5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$$ (2)

$$\underset{3/8}{\overset{\|}{f(1/2)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} \sin(n\pi/2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{12}{(2p+1)^3\pi^3}(-1)^p$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \boxed{\frac{\pi^3}{32}}$$ 2

Exercice 2 $\boxed{14 \text{ pts}}$

1) a) On a $\sum_n |c_n(f)| < \infty$ donc $g(x) = \sum_n c_n(f)e^{inx}$ CVN (en particulier g est continue). Par un calcul vu en cours (interversion $\Sigma - \int$) on a $c_n(g) = c_n(f)$, donc $f = g$ ds L^2!

2

b) Si (f^n) suite de Cauchy dans $A(\mathbb{T})$, alors $\sum_k |c_k(f^n) - c_k(f^m)| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

i.e. la suite (de suites!) (c^n) est de Cauchy dans $\ell^1(\mathbb{N})$. Donc $c^n \underset{\ell^1}{\to} c$ car ℓ^1 Banach.

Soit $f = \sum_k c_k e^{ikx}$, alors $f \in A(\mathbb{T})$ et $\|f^n - f\|_A = \|c(f^n) - c\|_{\ell^1} \to 0$. 2

c) $f = \sum_p c_p(f)e^{ipx}$, $g = \sum_q c_q(g)e^{iqx}$, donc $fg = \sum_n \sum_{p+q=n} c_p(f)c_q(g)e^{inx}$ (produit de Cauchy)

$$\|fg\|_A \le \sum_n \sum_{p+q=n} |c_p(f)||c_q(g)| = \left(\sum_p |c_p(f)|\right)\left(\sum_q |c_q(g)|\right) = \|f\|_A \|g\|_A.$$ 2

d)
$$\begin{aligned}\|f\|_A &= |c_0(f)| + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|}|c_n(f')| \\ &\le |c_0(f)| + \left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\neq 0}|c_n(f')|^2\right)^{1/2} \\ &\le |c_0(f)| + C\left(\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2dx\right)^{1/2} \quad \text{par Parseval.}\end{aligned}$$ 2

e) Soit $f_N = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$. C'est un polynôme trigo et $\|f_N - f\|_A = \sum_{|n|>N} |c_n(f)| \underset{N}{\longrightarrow} 0$.

1

2) a) $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_\ell = \frac{1}{2\ell\pi}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/\ell}(1-\ell x)\cos(nx)\,dx = \frac{2\ell}{\pi n}\int_0^{1/\ell}\sin nx\,dx = \frac{-2\ell}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{1/\ell} = \frac{2\ell}{n^2\pi}(1-\cos n/\ell)$$

$$\boxed{c_n = \frac{\ell}{n^2\pi}(1-\cos n/\ell)}$$ 2

b) $1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$ et $1-\cos x \le 2$ donc

$$\sum_n |c_n| \le \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\left(k \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2k^2} + 2k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)$$ 2

Donc $\in A(\mathbb{T})$

$k \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2}$ ✓ 1

$k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = k\, O\left(\frac{1}{k}\right)$ bornée ✓