Analyse Réelle et complexe

D.S. 1

04/03/2019

Exercice 1 (environ 9 pts)

On considère la fonction f égale à $x - x^3$ sur $[-1, 1]$ et périodique, de période 2.

a) Tracez assez précisement le graphe de f

b) Calculez les coefficients de Fourier de f et la série de Fourier associée à f.

c) Discutez la convergence de la série de Fourier associée à f

d) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} .$$

Exercice 2 (environ 12 pts)

Soit $f \in L^1_{\text{per}}(\mathbb{T})$, on dit que $f \in A(\mathbb{T})$ si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. On munit l'espace $A(\mathbb{T})$ de la norme $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$.

1) a) Montrez que si $f \in A(\mathbb{T})$ alors f est égale à sa série de Fourier.

b) Montrez que $A(\mathbb{T})$ est un espace de Banach.

c) Montrez que si $f, g \in A(\mathbb{T})$ alors $fg \in A(\mathbb{T})$ avec $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$.

d) Soit $f \in C^0_{\text{per}}(\mathbb{T})$ et qui est aussi C^1 par morceaux. Montrez que $f \in A(\mathbb{T})$ et qu'il existe C, une constante indépendante de f telle que

$$\|f\|_A \leq |c_0(f)| + C \left(\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

e) Montrez que les polynômes trigonométriques sont denses dans $A(\mathbb{T})$.

2) Pour tout entier $k \geq 1$ on définit la fonction Δ_k qui est 2π-périodique et qui coïncide avec $\max\{1 - k|x|, 0\}$ sur $[-\pi, \pi]$.

a) Calculez les coefficients de Fourier $c_n(\Delta_k)$ de Δ_k

b) Montrez que Δ_k appartient à $A(\mathbb{T})$ en montrant que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(\Delta_k)| \leq \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\left(k\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k^2} + 2k\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) .$$

Montrez que $\sup_k \|\Delta_k\|_A < \infty$.