CORRIGÉ FICHE 5

Rappels et compléments

- Si une suite de fonction (f_n) conv. unif. vers 0 sur un ens. $\mathcal{D}$ alors, pour toute suite $(x_n) \subset \mathcal{D}$ on doit avoir $f_n(x_n) \to 0$.

  En effet, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |g_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{D}$

  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |g_n(x_n)| \leq \varepsilon$.

  On se sert souvent de ça pour montrer qu'il n'y a <u>pas convergence uniforme</u> :
  par exemple $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1] \to f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

  Alors $f_n(1-\frac{1}{n}) - f(1-\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{n})^n \to e^{-1} \neq 0$.

- Une série de fonction $\sum_n f_n(x)$ cv unif sur $\mathcal{D}$ vers sa somme $S(x)$ si et seulement si son reste $R_N(x) = \sum_{n \geq N} f_n(x)$ cv unif. sur $\mathcal{D}$ vers 0.

  En particulier, chaque f_n doit conv. unif vers 0 sur $\mathcal{D}$ (c'est nécessaire, pas suffisant).
  Donc si on trouve $(x_n) \subset \mathcal{D}$ tq $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0, on a montré que la série $\sum_n f_n$ ne cv pas unif. sur $\mathcal{D}$.

  Dans les cas les plus compliqués on essaie de contredire le critère de Cauchy uniforme : trouver une suite (x_n) et des sommes partielles $\sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} f(x_n)$ qui ne tendent pas vers 0.

- Si $\sum_n f_n$ cv normalement sur $\mathcal{D}$ alors $\forall (x_n) \subset \mathcal{D}$ on doit avoir $\sum_n f_n(x_n) < \infty$.
  En effet $|f_n(x_n)| \leq \|f_n\|_{\infty,\mathcal{D}}$ et donc $\sum_n |f_n(x_n)| \leq \sum_n \|f_n\|_{\infty,\mathcal{D}} < \infty$.

  On peut ainsi parfois contredire la CVN en trouvant $(x_n) \subset \mathcal{D}$ tq $\sum_n f_n(x_n)$ ne cv pas

- <u>Règle d'Abel unif.</u>

  Si $f_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$ avec
  - $a_n(x) \searrow 0$ unif sur $\mathcal{D}$
  - $\exists M / \forall n \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}, \ |b_0(x) + \dots + b_n(x)| \leq M$

  Alors $\sum_n f_n$ cv unif. sur $\mathcal{D}$.

Exercice 1

1) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

CVS $\begin{cases} \text{Si } x > 1 \text{ alors } f_n(x) \to 1 \text{ donc div. gross de } \sum_n f_n. \\ \text{Si } x = 1 \text{ alors } f_n(x) = 1/2 \text{ , idem.} \\ \text{Si } 0 \leq x < 1 \text{ , alors } f_n(x) \leq x^n \text{ et } \sum_n x^n \text{ cv, donc } \sum_n f_n \text{ cv.} \end{cases}$

CVN sur $[0,1[$.

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - x^n nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \geq 0$$

$f_n \nearrow$ donc $\|f_n\|_{\infty,[0,1[} = f_n(1) = \frac{1}{2}$

Pas de CVN sur $[0,1[$.

CVU sur $[0,1[$

$$f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} \neq 0 \Rightarrow \text{pas de CVU sur } [0,1[.$$

CVN sur $[0,a]$

$\|f_n\|_{\infty,[0,a]} = \dfrac{a^n}{1+a^n} \leq a^n$ donc CVN sur $[0,a]$

et CVU sur $[0,a]$.

2) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$

CVS $|f_n(x)| \leq \dfrac{x^2}{n^3}$ donc CVS sur $[0,+\infty[$

CVN $f_n(n) = \dfrac{n^2}{2n^3} = \dfrac{1}{2n}$ et $\sum_n \frac{1}{n}$ ne cv pas donc pas de CVN sur $[0,+\infty[$

sur $[0,a]$: $\dfrac{x^2}{n^3+x^3} \leq \dfrac{a^2}{n^3}$ donc CVN sur $[0,a]$.

CVU on a CVU sur $[0,a]$.

sur $[0,+\infty[$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2}{k^3+n^3} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n^2}{9n^3} = \frac{1}{9}$

3) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3 + x^{3/2}}$

CVS sur $\mathbb{R}^+$ ✓ ok.

CVN sur $\mathbb{R}^+$: $f_n(n^2) = \dfrac{n^2}{2n^3} = \dfrac{1}{2n}$ donc pas de CVN sur $\mathbb{R}^+$.

Par contre CVN facile sur $[0,a]$.

CVU sur $\mathbb{R}^+$ $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2}{k^3+n^3} \geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{n^2}{9n^3} = \frac{1}{9}$ pas de CVU sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2

On l'a fait sauf:

3) $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{x^4+n}$ et $\displaystyle\sum_n \frac{x^2}{x^4+n}$ diverge, donc $\displaystyle\sum_n \|f_n\|_{\infty,A}$ diverge encore plus !

Exercice 5

$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$, $x \in [-\pi, -\pi/2]$

1) $\dfrac{1}{n+x} \searrow_0$ unif sur $[-\pi, -\pi/2]$ car $\dfrac{1}{|n+x|} = \dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n-\pi}$
(n assez grand)

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \operatorname{Im} \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \operatorname{Im} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)x}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{-ix/2} - e^{ix/2}\right)}$$

$$= \operatorname{Im} e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin x/2} = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin x/2}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin \pi/4}$$

On peut appliquer Abel uniforme.

2) $\left|\dfrac{\sin n\pi/2}{n-\pi/2}\right| = \begin{cases} 0 & n=2p \\ \dfrac{1}{2p+1-\pi/2} & , n=2p+1. \end{cases}$ série div. donc pas de CVN (car pas de CV absolue en $-\pi/2$)

Exercice 6

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2-x^2}$$

1) Il y a CVS sur $\mathbb{R}^+$, φ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

2) Sur $[0,1]$ il y a CVU car $\frac{2x}{n^2-x^2} \leq \frac{2}{n^2-1}$
CVN

Donc φ est continue sur $[0,1]$, l'intégrale existe.

On peut intervertir Σ et $\int$ ainsi :

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\, dx = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\ln |n^2-x^2| \right]_0^1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1.\cancel{3}}{2.\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}.\cancel{4}}{\cancel{3}.\cancel{3}} \cdots \frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n+1)}}{\cancel{n}.\cancel{n}} \frac{\cancel{n}.\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+1)}} \cdots \right)$$

$$= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Exercice 7

1) $D_f = \mathbb{R}^+_*$.

2) Sur $[a,+\infty[$ ($a>0$) on a $e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$ donc CVN

On a CVU sur tout $[a,+\infty[$, donc on a continuité sur $]0,+\infty[$

3) $(e^{-x\sqrt{n}})' = -\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ et on a CVN de la série des dérivées sur $[a,+\infty[$

Donc $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} < 0$.

4) Il y a CVU sur $[a,+\infty[$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$.

Exercice 8

1) a) $\frac{e^{-nt}}{n+1} \leq \frac{e^{-(n+1)t}}{n+2}$ donc $\frac{e^{-nt}}{n+1} \searrow_0$ et on applique CSSA.

b) $\sum_n \frac{e^{-nt}}{n+1}$ CV pour $t>0$.

c) $|R_N(t)| \leq \frac{e^{-Nt}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \Rightarrow$ CVU vers 0

d) $\sup_{[0,+\infty[} \left| \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1} \right| \geqslant \frac{1}{n+1}$ pas de CVN. / idem $]0,+\infty[$.

e) $\lim_{t\to\infty} \sum_n = \sum_n \lim_{t\to\infty}$

$\lim e^{-nt} = 0$ sauf $n=0$.

$\Rightarrow \lim_{\infty} = \frac{(-1)^0 e^0}{0+1} = 1.$