Corrigé rapide Fiche 1

Exercice 1

a) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ est $\geqslant 0$ et $\sim \frac{1}{n}$ donc série DV.

b) $u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$ est $\geqslant 0$ et $= \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}} = \frac{1}{e^n}\,\frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-4n}} \sim e^{-n}$ donc série CV

c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-1/n^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{n^4} - \left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{n^4}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$

$= \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$ donc série CV.

d) $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln(1+1/n)} = e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right)} = e - e^{1-1/2n + o(1/n)} = e\left(1-e^{-1/2n+o(1/n)}\right)$

$= e\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right)\right) = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc série DV.

Exercice 2

$\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ ✓

$\sqrt{u_n v_n} \leq \sqrt{\max(u_n,v_n)^2} = \max(u_n, v_n)$ ✓

$\frac{u_n v_n}{u_n+v_n} \leq \frac{u_n v_n}{u_n} = v_n$ ✓.

Exercice 3

$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(1/n^2\right)$ cv.

Exercice 4

a) $u_n = \frac{(-1)^n\, 8^n}{(2n)!}$. Pour le CSSA on veut $\frac{8^n}{(2n)!} \searrow 0$. La cv vers 0 est ok.

$\frac{8^{n+1}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{8^n} = \frac{8}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$ pour $n \geqslant 1$. ok.

b) Reste d'une série alternée :

$$\left|\sum_{n\geqslant N} u_n\right| \leq |u_{N+1}|.$$

Exercice 5

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 6

a) $u_n = e^{-n^\alpha}$. Il faut $u_n \to 0 \Rightarrow n^\alpha \to +\infty \Rightarrow \alpha > 0$.

$\alpha > 0$: $n^2 e^{-n^\alpha} = e^{2\ln n - n^\alpha} \to 0$

b) $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ pour $u_n \to 0$

$0 \leq \alpha \leq 1$ $\quad \frac{\ln n}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$ DV

$\alpha > 1$: $\underbrace{\frac{\ln n}{n^{\varepsilon/2}}}_{\to 0 < 1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}} \Rightarrow$ CV.

$\alpha = 1+\varepsilon$

c) $e^{-(\ln n)^\alpha}$, $\alpha > 0$ pour $\to 0$, $n^2 e^{-(\ln n)^\alpha} = e^{2\ln n - (\ln n)^\alpha}$

$\alpha > 1$ $\to 0$ ✓

d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ $\quad \alpha > 0$ $\quad$ On veut appliquer CSSA, donc $\frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} \searrow$

i.e. $(n+1)^\alpha + (-1)^{n+1} > n^\alpha + (-1)^n$

La pire situation à satisfaire : $(n+1)^\alpha - 1 > n^\alpha + 1$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha > 2/n^\alpha$ $\quad$ vrai pour n assez grand car $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 1$ et $2/n^\alpha \to 0$.

Exercice 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, 3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n} 3^{-p}\, 3^{-(n-p)} = \left(\sum_n 3^{-n}\right)\left(\sum_p 3^{-p}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-1/3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

II Suites de fonctions

Exercice 8

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

1) $f_n(x) \to 0 \,,\ x \neq 0$
$\qquad\qquad +\infty \,,\ x = 0$

2) $\displaystyle\sup_{[a,+\infty[} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \leq \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2a^2} \to 0$ idem $]-\infty, -a]$.

3) $\displaystyle\sup_{]0,+\infty[} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$; $f(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$, $f'(x) = -2n^2x \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & +\infty \\ f & n/\sqrt{\pi} & \searrow & 0 \end{array}$$

$\sup = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}$ ne tend pas vers 0.

Exercice 9

$$f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \,,\ x \in [0,1]$$

1) $f_n(x) \to (x^2+1)e^x = f(x)$

$$|f_n(x) - f(x)| = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x} - ne^x - xe^x}{n+x} = (x^2+1)\frac{2x \operatorname{ch} x}{n+x} \leq \frac{4 \operatorname{ch} 1}{n}$$

2) $$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+1)e^x\,dx = \left[(x^2+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx$$

$$= 2e - 1 - \left[2xe^x\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^x\,dx = -1 + 2\left[e^x\right]_0^1$$
$$= 2e - 3.$$

Exercice 10

Trop compliqué !