

2) ✓ 3) ✓

$$4) |\mathbb{E}[e^{itx}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itx}|] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

Si μ_X admet une densité $f(x) dx$ alors

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \hat{f}(t)$$

est la transformée de Fourier de f . On sait qu'on peut inverser la transformée de Fourier, par exemple si $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)| dt < \infty$,

on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \hat{f}(t) dt.$$

Ainsi, dans le cas des lois ~~continues~~ à densité, la fonction ϕ_X caractérise la loi de X .

Théorème ~~II.12~~ II.12

Dans tous les cas, la fonction caractéristique ϕ_X caractérise la loi de X .

Dém

Lemme II.13

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, à support compact. On a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-a|t|} \phi_X(t) dt \right) f(x) dx$$

Démonstration

Tout d'abord, notons que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-a|t|} dt &= \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-at} dt + \int_{-\infty}^0 e^{itx} e^{at} dt \\ &= \frac{-1}{ik-a} + \frac{1}{ik+a} = \frac{2a}{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(y-x)} e^{-a|t|} dt \mu_x(dy)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + (y-x)^2} d\mu_x(dy).$$

Puis aussi, par le théorème de Fubini, c'est égal à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-a|t|} \phi_x(t) dt.$$

Soit f continue à support compact, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + (y-x)^2} d\mu_x(y) dx$$

$$z = \frac{y-x}{a} \quad x = y - az$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-a|t|} \phi_x(t) dt dx \quad dz = \frac{1}{a} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-az) \frac{2}{1+z^2} dz d\mu_x(y).$$

Lorsque $a \rightarrow 0$, ~~pour~~ la première intégrale tend vers $f(y) 2\pi$
(par conv. domérée).

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) d\mu_x(y) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-a|t|} \phi_x(t) dt \right) f(x) dx.$$

Dém du thm.

Evident, ϕ_x détermine $\mathbb{E}[f(x)]$ donc la loi de x .

Corollaire II.14

Si ϕ_x est intégrable pour dx , alors la loi de x admet une densité continue, donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_x(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dém

Si ϕ_x est intégrable par rapport à dx , on applique ~~Fubini~~ conv. dom.

dans le Lemme II.13:

$$\mathbb{E}[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-a|t|} \phi_x(t) f(x) dx dt$$

~~par la conv. dom.~~

$$\mathbb{E}[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_x(t) f(x) dt dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Théorème II.14

La fonction ϕ_x est C^k si $|x|^k$ est intégrable. Dans ce cas on a

$$\phi_x^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[e^{itx} x^k].$$

Dém

Si $|x|^k$ est intégrable, alors c'est le théorème usuel de dérivation sous l'intégrale :

$$\phi_x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_x(x).$$

L'intérieur de l'intégrale est $C^k(t)$, de dérivée k -ième $i^k x^k e^{itx}$. Cette fonction est majorée par une fonction intégrable indépendante de t ($|x|^k$), on peut donc appliquer le théorème.

$$\phi_x^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} i^k x^k e^{itx} d\mu_x(x).$$

$$= i^k \mathbb{E}[e^{itx} x^k].$$

~~Théorème II.14~~

Regardons le cas gaussien en détails. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

alors

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$y = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(m+\sigma y) - y^2/2} dy$$

$$= \frac{e^{itm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2it\sigma y)} dy$$

$$= \frac{e^{itm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2} dy$$

$$= \frac{e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy$$

$$= e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Dans le cas $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on trouve $e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{\sigma^{2k}}{k!} t^{2k}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}[X^n] = \phi_X^{(n)}(0) \frac{1}{i^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k+1 \\ \frac{(2k)!}{k!} \frac{\sigma^{2k}}{2^k} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X^4] = \frac{4!}{2!} \frac{\sigma^4}{4} = 3\sigma^4.$$

etc...

Proposition II. 15

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indépendantes, alors

$$\phi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \dots \phi_{X_n}(t).$$

$$\bullet \phi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \phi_X(at)$$

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors sa fonction caractéristique est définie sur $\mathbb{R}^n$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}] = \mathbb{E}\left[e^{i \sum_j t_j X_j}\right],$$

$$t \in \mathbb{R}^n.$$

Les propriétés restent les mêmes que dans le cas à 1 variable aléatoire.

Proposition II. 16

Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement

$$\text{si} \quad \phi_{(X_1, \dots, X_n)}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t_i).$$

Dem

Un sens est évident.

Maintenant, inversement si

$$\phi_{(X_1, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n) = \phi_{X_1}(u_1) \dots \phi_{X_n}(u_n),$$

alors considérons des v.a. $(Y_1, \dots, Y_n)$ indépendantes, de mêmes lois individuelles que les X_i , respectivement. On a

$$\begin{aligned}\phi_{(Y_1, \dots, Y_n)}(u_1, \dots, u_n) &= \phi_{Y_1}(u_1) \dots \phi_{Y_n}(u_n) \\ &= \phi_{X_1}(u_1) \dots \phi_{X_n}(u_n) \\ &= \phi_{(X_1, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \phi_{(X_1, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n).\end{aligned}$$

On conclut par unicité de la fonction caractéristique. 

