Cours Math I Analyse

Stéphane Attal

Contents

Chapter 1

Les nombres réels

1.1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, \ldots\}$,

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, i.e. l'ensembles des fractions

$$\frac{a}{b},$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pour chacun de ces ensembles, l'ajout de $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$.

$\mathbb{Q}_+$ est l'ensemble des rationnels positifs.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble déjà bien fourni de nombres. Par exemple, aucun rationnel $q \in \mathbb{Q}$ n'admet de "suivant" dans $\mathbb{Q}$. En effet, si on regarde l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{Q}\,;\ p > q\}$$

alors $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément. En effet, pour tout $p \in \mathcal{A}$, on a $p - q \in \mathbb{Q}_+^*$ et donc $p - (p - q)/2$ est un élément de $\mathcal{A}$, plus petit que p.

Une autre façon de dire la même chose : dans n'importe quel intervalle (rationnel) autour d'un rationnel q il y a une infinité de rationnels (en effet, si ce n'était pas le cas, il y aurait un nombre fini de rationnels dans $]q, q + 1/2[$ et donc il y aurait un plus petit).

Et pourtant les rationnels sont loins d'être suffisants, la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel. Démontrons-le. Si $\sqrt{2}$

est un rationnel a/b, alors on peut toujours mettre la fraction a/b sous forme réduite, i.e. sans diviseur commun. Notons c/d cette fraction réduite. On a

$$\frac{c^2}{d^2} = 2$$

donc $c^2 = 2d^2$. Ainsi c^2 est pair, ce qui implique que c est pair (le carré d'un impair est impair). Donc $c = 2c'$, ce qui donne $d^2 = 2c'^2$ et d est pair aussi. Ce qui contredit l'hypothèse initiale de primalité entre c et d. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. C'est d'ailleurs le cas de toutes les racines carrées qui ne sont pas des entiers (non démontré ici).

Une autre façon de dire la même chose est de considérer l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{q \in \mathbb{Q}\,;\ q^2 < 2\}\,.$$

C'est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, il est borné à droite (par exemple par $3/2$), mais pourtant il n'a pas de plus grand élément. Montrons le. En effet, si $q \in \mathcal{B}$, alors de deux choses l'une, soit q est plus petit que 1 auquel cas il est facile de trouver un élément dans $\mathcal{B}$ qui soit plus grand (par exemple $5/4$), soit q est plus grand que 1. Dans ce cas, posons

$$\varepsilon = \frac{2 - q^2}{3q}\,.$$

Alors ε est rationnel, positif et plus petit que q. Calculons $(q+\varepsilon)^2$, on trouve

$$q^2 + 2\varepsilon q + \varepsilon^2$$

qui est strictement plus petit que

$$q^2 + 3q\varepsilon\,,$$

c'est à dire que 2. Donc à tout élément de $\mathcal{B}$ on sait associer un élément plus grand, toujours dans $\mathcal{B}$. Il n'y a pas de plus grand élément dans $\mathcal{B}$.

C'est ce genre de “trous” dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ que l'on cherche à combler avec l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1.2 Ensembles ordonnés

On dit qu'un ensemble X est *ordonné* s'il est muni d'une relation $\leq$, entre éléments de X qui satisfait

i) $x \leq x$, pour tout $x \in X$,

ii) si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
iii) si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
Ensuite on utilise des notations évidentes comme
$x \geq y$ pour $y \leq x$
$x < y$ pour $x \leq y$ et $x \neq y$
etc.
Par exemple $\mathbb{Q}$ avec la relation usuelle $\leq$ est un ensemble ordonné. Mais aussi l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties de E, muni de l'inclusion d'ensemble $\subset$ est un ensemble ordonné aussi.

On dit qu'un ensemble ordonné X est muni d'un *ordre total* si tous les éléments de X sont comparables :

"pour tout $x, y \in X$ on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$."

C'est le cas pour $(\mathbb{Q}, \leq)$, mais ce n'est pas le cas pour $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Soit X un ensemble ordonné et $A \subset X$ une partie de X. Un *majorant* de A est un élément $m \in X$ tel que $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un majorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est *borné supérieurement*, ou que A est *majoré*. De même un *minorant* de A est un élément $n \in X$ tel que $a \geq n$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un minorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est *borné inférieurement*, ou que A est *minoré*.

On dit que A admet un élément *maximal* s'il admet un majorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_0 \in A$ tel que $a \leq a_0$ pour tout $a \in A$. Un tel a_0 est forcement unique (exercice), on le note $\max A$. De même on dit que A admet un élément *minimal* s'il admet un minorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_1 \in A$ tel que $a \geq a_1$ pour tout $a \in A$. Un tel a_1 est forcement unique (exercice), on le note $\min A$.

Enfin, on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A, s'il existe. De même, on note $\inf A$ le plus grand des minorants de A, s'il existe. Notez que $\sup A$ est encore un majorant de A et que $\inf A$ est encore un minorant de A. Notez que $\sup A$ n'a aucune raison d'être un élément de A, si c'est le cas on a forcement $\sup A = \max A$ (exercice).

Voyons quelques exemples, dans le cas $X = \mathbb{Q}$.

Dans le cas $A =]-1, 1]$. Cet ensemble est majoré et minoré. On a $\max A = 1$, pas de min, on a $\sup A = 1$ et $\inf A = -1$.
Dans le cas $A = [2, +\infty[$. Cet ensemble est minoré, mais pas majoré. On a pas de max, mais $\min A = 2$, on a pas de sup et $\inf A = 2$.
Pour le cas $A = \{q \in \mathbb{Q}\,;\ q^2 < 2\}$, cet ensemble est majoré mais pas minoré. Il n'a pas de max, pas de min, pas de sup, pas de inf.

1.3 Le corps des nombres réels

Théorème 1.3.1 (Fondamental) *Il existe un corps $\mathbb{R}$ totalement ordonné, qui contient $\mathbb{Q}$ et qui a la propriété que toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.*

Rappelons que par *corps* on entend que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication . internes telles que :
• l'addition est commutative, associative, d'élément neutre 0 et inversible :

$$\begin{aligned}
&a+b=b+a\\
&a+(b+c)=(a+b)+c\\
&a+0=a\\
&\forall a\in\mathbb{R}, \exists -a\in\mathbb{R}\,;\ a+(-a)=0\,,
\end{aligned}$$

• la multiplication est commutative, associative, d'élément neutre 1, inversible (sauf pour 0) :

$$\begin{aligned}
&ab=ba\\
&a(bc)=(ab)c\\
&1.a=a\\
&\forall a\in\mathbb{R}^*, \exists a^{-1}\in\mathbb{R}^*\,;\ a.(a^{-1})=1\,,
\end{aligned}$$

• la multiplication est distributive sur l'addition :

$$a(b+c)=ab+ac\,.$$

La construction de $\mathbb{R}$ et la preuve du théorème est extrèmement longue, nous ne la ferons pas. L'essentiel est de retenir que dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet un sup. On en déduit facilement que toute partie non vide minorée admet un inf (exercice). Ce n'était pas le cas de $\mathbb{Q}$, comme on l'a vu dans l'exemple 3. Dans $\mathbb{R}$ on a par exemple, si

$$A=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x^2<2\}$$

alors $\sup A=\sqrt{2}$.

1.4 Densité de $\mathbb{Q}$

Cette propriété d'existence du sup dans $\mathbb{R}$ a beaucoup de conséquences très importantes.

Théorème 1.4.1 ($\mathbb{R}$ est archimédien) *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Démonstration Soit $A = \{nx\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Si la propriété ci-dessus n'était pas vraie alors y serait un majorant de A. Donc A admettrait un sup dans $\mathbb{R}$, noté α.

On a $\alpha - x < \alpha$, donc $\alpha - x$ n'est pas un majorant de A. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mx > \alpha - x$. D'où

$$(m+1)x > \alpha\,.$$

Ce qui contredit que $\alpha = \sup A$. □

Théorème 1.4.2 (Densité de $\mathbb{Q}$) *Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*

Démonstration On a $y - x > 0$, donc par le Théorème 1.4.1 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n(y-x) > 1\,.$$

De même, par le même théorème, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$-m_2 < nx < m_1$$

(n est fixé, on cherche m_1 tel que $m_1 \times 1 > nx$, on fait de même avec $-nx$). On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$m - 1 \leq nx < m\,,$$

en effet, on regarde $m = m_1 - 1$, si $nx < m$ on recommence, par contre si $m \leq x$ alors on a gagné.

Ainsi, on a

$$nx < m \leq nx + 1 < ny$$

d'où

$$x < \frac{m}{n} < y\,.$$

□

Théorème 1.4.3 (Caractérisation du sup) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide, majoré. Le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est le sup de A si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $a \in A$ tel que*

$$\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha\,. \tag{1.1}$$

Démonstration Soit $\alpha = \sup A$. On a donc $\alpha \geq a$ pour tout $a \in A$. Soit $\varepsilon > 0$, si on a $\alpha - \varepsilon \geq a$ pour tout $a \in A$ on aurait que $\alpha - \varepsilon$ est un majorant de A, ce qui contredirait que α est le sup de A. Donc il existe un $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a$.

Inversement si (1.1) est vérifié, alors α est un majorant de A. Si $\alpha' < \alpha$ est un majorant de A, alors en prenant $\varepsilon = (\alpha - \alpha')/2$, on sait qu'il existe $a \in A$ tel que $a > \alpha - \varepsilon > \alpha'$. Ce qui contredit que α' est un majorant. Ainsi α est le plus petit des majorants. □

Une façon simple de comprendre ce résultat est que :

– soit $\sup A$ est un élément de A (c'est donc un $\max A$),

– soit il est "au bord de A" et les points de A s'accumulent près de $\sup A$.

1.5 Racines n-ièmes

Théorème 1.5.1 (Racine n-ièmes) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, tel que*

$$y^n = x \,. \tag{1.2}$$

Démonstration Tout d'abord l'unicité. Si $y_1 \neq y_2$ (par exemple $y_1 < y_2$), on a $y_1^n \neq y_2^n$, (i.e. $y_1^n < y_2^n$). Donc on ne peut pas avoir $y_1^n = y_2^n = x$.

Maintenant l'existence. Soit

$$B = \{r \in \mathbb{R}\,;\ r > 0, r^n < x\}\,.$$

Si $x < 1$ alors comme $1^n = 1$, on a que 1 est un majorant de B. Si $x \geq 1$ alors $x^n \geq x$ et x est un majorant de B. Dans tous les cas on a montré que B est majoré.

Il est aussi vrai que B est non vide, car

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^n \leq \frac{x}{x+1} < x\,.$$

Donc B admet un sup, notons le y.

Si on a $y^n < x$, on choisit $h \in]0,1[$ tel que

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, y^{n-k}\, h^k \\
&= y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\, y^{n-k}\, h^{k-1} \\
&\leq y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\, y^{n-k} \\
&= y^n + h((1+y)^n - y^n) \\
&< x\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $y+h$ est aussi un élément de B et y n'est pas un majorant de B.

Si $y^n > x$, soit $k \in]0,1[$, $k < y$ et

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(y-k)^n &= y^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\, y^{n-j}\, (-k)^j \\
&= y^n - k \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{j}\, y^{n-j} (-k)^{j-1} \\
&\geq y^n - k \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\, y^{n-j} \\
&= y^n - k((1+y)^n - y^n) \\
&> x\,.
\end{aligned}$$

Si $t > y-k$ alors $t^n > (y-k)^n > x$ et donc t n'appartient pas à B. Donc cela montre que $y-k$ est un majorant de B, ce qui contredit le fait que y est le plus petit.

Il ne reste donc plus que $y^n = x$ comme possibilité. □

Ce nombre y qui vérifie $y^n = x$ est la *racine n-ième* de x. On le note

$$y = x^{1/n}\,.$$

1.6 Valeurs absolues, parties entières

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Remarquez que dans tous les cas on a

$$x \leq |x| \qquad \text{et} \qquad -x \leq |x|\ .$$

Et on a même une sorte de réciproque évidente, mais utile

$$\text{si} \quad x \leq a \ \text{ et } \ -x \leq a \quad \text{alors} \quad |x| \leq a\,.$$

Le résultat suivant est très simple et très utile.

Lemme 1.6.1 *On a*

$$|x| \leq M$$

si et seulement si

$$-M \leq x \leq M\,.$$

Démonstration Si $|x| \leq M$ alors $M \geq 0$ et

$$\begin{cases} x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x \leq M & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -M \leq x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -M \leq x \leq M & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Inversement, si $-M \leq x \leq M$ alors $M \geq 0$ mais aussi $-M \leq -x \leq M$. D'où $|x| \leq M$ dans tous les cas. □

Une autre forme qui apparaît souvent est la suivante.

Lemme 1.6.2 *On a*

$$|x-a| \leq \varepsilon$$

si et seulement si

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\,.$$

La démonstration est laissée en exercice.

Proposition 1.6.3 (Inégalité triangulaire) *Pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$ *on a*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \ .$$

Démonstration On a $|a+b| = a+b$ ou $-a-b$. Dans tous les cas, on $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Ensuite, supposons que $|a| \geq |b|$ (sinon, on échange les rôles). Alors

$$||a| - |b|| = |a| - |b| = |a + b - b| - |b| \leq |a + b| + |b| - |b| = |a + b| \ .$$

□

Rappelons au passage quelques notations utiles :

$$x^+ = \max\{x, 0\}, \quad x^- = \max\{-x, 0\} \, .$$

Tous deux sont positifs et on a

$$\begin{cases} x = x^+ - x^- \ , \\ |x| = x^+ - x^- \ . \end{cases}$$

Nous finissons par un petit rappel sur les *parties entières*. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n + 1 \, .$$

Ce n est noté $E[x]$, la *partie entière* de x.

Vérifions l'existence et l'unicité de cette partie entière. Tout d'abord l'unicité. Si $m < x \leq m+1$ aussi alors, ou bien $n < m$ auquel cas on a $n + 1 \leq m$ et donc $n + 1 \leq x$, ce qui est impossible ; ou bien $n > m$ et on fait le même raisonnement ; ou bien $n = m$. Enfin, montrons l'existence. L'ensemble

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \, ; \ m \leq x\}$$

est clairement non vide et majoré, il admet donc un sup. L'ensemble $A^+ = A \cap \mathbb{N}$ est fini et

$$\sup A = \sup A^+ = \max A^+ = \max A \, .$$

Il y a donc un plus grand élément dans A, notons le n. On a donc $n \leq x$, mais par contre $n + 1 \notin A$ et donc $x < n + 1$.

Chapter 2

Les suites

2.1 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est basé sur la propriété suivante. Soit $S \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble qui vérifie :

• $0 \in S$

• si $n \in S$ alors $n+1 \in S$.

Dans ce cas forcement $S = \mathbb{N}$.

Cette propriété ne se démontre pas, c'est en fait une définition axiomatique de $\mathbb{N}$: "l'ensemble $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble contenant 0 et qui a la propriété de contenir tous les "suivants" de ses éléments."

Comment cela s'applique t'il au raisonnement par récurrence ? On considère une propriété $P(n)$ qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre pour cela que $P(0)$ est vraie et que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie aussi. Soit S l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(n)$ est vraie. Alors S contient 0 et contient les suivants de tous ses éléments. Donc $S = \mathbb{N}$. Ce qui veut dire que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Voyons un exemple. Montrez que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} \, . \tag{$P(n)$}$$

Pour $n = 0$ on a $(x+y)^0 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} = \binom{0}{0} x^0 \, y^0 = 1 \, .$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Maintenant si $P(n)$ est vraie, alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

et donc

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^{k+1}\, y^{n-k} + x^k\, y^{n-k+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} x^j\, y^{n+1-j} \left(\binom{n}{j} \mathbb{1}_{j\le n} + \binom{n}{j-1}\mathbb{1}_{j\ge 1}\right).\end{aligned}$$

Si $j=0$ on a

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{j}.$$

Si $j=n+1$ on a

$$\binom{n}{j-1} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{j}.$$

Enfin, si $0<j<n+1$ alors

$$\begin{aligned}\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} &= \frac{n!}{j!(n)j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}\\ &= \frac{n!(n-j+1)+n!j}{j!(n-j+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{j!(n-j+1)!}\\ &= \binom{n+1}{j}.\end{aligned}$$

Ainsi dans tous les cas on a

$$\binom{n}{j} \mathbb{1}_{j\le n} + \binom{n}{j-1}\mathbb{1}_{j\ge 1} = \binom{n+1}{j}$$

et donc

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} x^j\, y^{n+1-j} \binom{n+1}{j}$$

et $P(n+1)$ est vraie. Grâce au raisonnement par récurrence on a montré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il arrive parfois que $P(n)$ soit indéxée par $n \geq 1$ seulement. La méthode est la même, on démarre à $P(1)$ c'est tout.

2.2 Les suites, suites particulières

Une *suite réelle* est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, on la voit plutôt comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indéxée par $\mathbb{N}$ que comme une fonction $n \mapsto u(n)$.

Une suite peut être définie comme une fonction explicite de n :

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) ,$$

ou par récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2 , \\ v_{n+2} &= 3v_{n+1} - 5v_n , \\ &\dots \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques suites particulières.

Les *suites arithmétiques* sont définies par

$$u_{n+1} = u_n + r$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $r \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = u_0 + nr .}$$

En association avec ces suites, notez la formule utile suivante

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .}$$

Les *suites géométriques* sont définies par

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $q \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = q^n\, u_0 .}$$

Avec ces suites géométriques on a les formules bien connues suivantes

$$\boxed{\sum_{k=n_i}^{n_f} q^k = \frac{q^{n_i} - q^{n_f+1}}{1-q} = q^{n_i}\,\frac{1-q^N}{1-q}\,,}$$

où $N = n_f - n_i + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Enfin on a un mix des deux avec les suites

$$u_n = au_n + b$$

qui donnent

$$\boxed{u_n = a^n\, u_0 + b\,\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,.}$$

2.3 Résolution des suites $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Une situation très fréquente est de rencontrer des suites définies par récurrence de la forme

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont donnés et u_0, u_1 sont fixés. Le théorème qui suit donne la forme explicite de u_n dans ce cas.

Théorème 2.3.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixé et soit (u_n) la suite définie par récurrence*

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,, \tag{2.1}$$

*pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère l'*équation caractéristique *de cette suite*

$$r^2 - ar - b = 0\,. \tag{2.2}$$

i) Si l'équation (2.2) admet deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n}\,,$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

ii) Si l'équation (2.2) admet une seule solution réelle (double) r_0 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n}\,,$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.
iii) Si l'équation (2.2) admet deux solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, \rho^n\, \cos(n\theta) + \mu\, \rho^n\, \sin(n\theta)},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

Démonstration Commençons par le cas i). Si r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de (2.2) alors il est facile de vérifier que la suite

$$u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$

vérifie la relation (2.1). Inversement, si (u_n) vérifie (2.1), il existe un unique couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$u_0 = \lambda + \mu, \quad u_1 = \lambda\, r_1 + \mu\, r_2$$

car $r_1 \neq r_2$. Or les suites solutions de (2.1) sont clairement entièrement déterminées par u_0 et u_1. Donc la suite

$$u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$

est bien l'unique solution de (2.1) dans ce cas.

Le cas ii) se traite de la même façon : on vérifie à la main que

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n},$$

est solution dans ce cas ; toutes les solutions sont déterminées par u_0 et u_1 ; à chaque couple (u_0, u_1) correspond un unique couple (λ, μ) qui fait que

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n},$$

est solution de (2.1).

Pour le cas iii) il est plus facile de passer par les nombres complexes. On peut toujours trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_0 = z + \bar{z} \quad \text{et} \quad u_1 = zr + \bar{z}\bar{r}\,.$$

On en déduit que la suite

$$u_n = zr^n + \bar{z}\bar{r}^n$$

est solution de (2.1). Ce qui donne

$$zr^n + \bar{z}\rho^n = 2\mathrm{Re}(zr^n) = 2\mathrm{Re} z\, \rho^n\, \cos(n\theta) - 2\mathrm{Im} z\, \rho^n\, \sin(n\theta)\,.$$

$\square$

2.4 Limites

Avant de commencer sur les limites, un petit exercice. Que peut-on dire de deux nombres réels a et b tels que $|a-b| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$?

Réponse : forcément $a = b$. En effet, si $a \neq b$ alors, posons $\varepsilon = |a-b|/2$. On a $\varepsilon > 0$ et donc par hypothèse on devrait avoir $|a-b| \leq \varepsilon$, ce qui n'est pas possible. Donc il ne reste que $a = b$.

Une petite application : que peut-on dire des nombres 1 et 0,9999999... ? Tout simplement : ce sont les mêmes nombres, ils sont égaux. En effet, la distance entre les deux nombres est plus petite que

$$1 - 0,999 = 0,001\,,$$

mais aussi plus petite que

$$1 - 0,9999999 = 0,0000001\,,$$

etc. On voit bien que la distance est plus petite que tout $\varepsilon > 0$. Donc en vertu de ce que l'on a démontré plus haut, ces deux nombres sont égaux. 1 et 0,9999999.... sont deux écritures différentes du même nombre.

Ce genre de considérations ammènent assez naturellement à la définition rigoureuse de limite. Comment exprimer mathématiquement que la suite $u_n = 1/n$ tend vers 0 ? En effet, on voit bien que quand n croit, les nombres $1/n$ se rapprochent de plus en plus de 0, mais sans jamais prendre la valeur 0. Et si on prend un exemple plus compliqué comme $u_n = cos(n)/n$, on voit la suite se rapprocher de 0 mais avec des oscillations plus hératiques. Comment caractériser cela ?

On dit qu'une suite (u_n) tend vers une limite l si les tous les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de l quand n devient assez grand.

Autrement dit, pour toute marge $\varepsilon > 0$ que l'on se donne à l'avance, la suite (u_n) est toute entière comprise, au delà d'un certain rang n_0, dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

Cela nous amène à la formulation officielle, qu'il faudra bien retenir car nous l'utiliserons sans arrêt. On dit, pour une suite (u_n), que sa limite est l quand n tend vers $+\infty$ si

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

En termes plus condensés ça donne

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Dans ce cas on dit que la suite est *convergente*, qu'elle *converge* vers l. On écrit ça aussi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l\,,$$

ou parfois tout simplement

$$\lim u_n = l\,.$$

Revenons sur nos exemples et voyons comment montrer que la limite de nos deux suites est effectivement 0, avec cette définition. Commençons avec la suite $u_n = 1/n$. Soit $\varepsilon > 0$, si on veut que $|u_n - 0| \leq \varepsilon$, cela veut dire $1/n \leq \varepsilon$, ou encore $n \geq 1/\varepsilon$. Donc en prenant pour n_0 le premier entier supérieur à $1/\varepsilon$ on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 0| \leq \varepsilon\,.$$

Donc $\lim u_n = 0$.

Regardons le deuxième exemple : $u_n = \cos(n)/n$. Pour montrez que la limite est 0, il faut trouver n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|\cos(n)/n| \leq \varepsilon$. Comme $|\cos(n)| \leq 1$ pour tout n, on a

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

donc comme précédement il suffit de prendre $n_0 \geq 1/\varepsilon$. On a montré que $\lim u_n = 0$.

Quand une suite ne converge pas vers une limite $l \in \mathbb{R}$, elle peut avoir deux comportements différents. Elle peut tendre vers $\pm\infty$ ou bien ne pas avoir de limite du tout. Par exemple la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Voici les définitions de $\lim u_n = +\infty$ et de $\lim u_n = -\infty$. L'idée est assez proche de celle de la limite finie. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$, si elle devient toute entière plus grande que n'importe quel nombre $A > 0$ fixé à l'avance, pour peu qu'on attende un rang n_0 suffisamment grand:

$$\forall A > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A\,.$$

Pour la limite $-\infty$, la définition va de soit :

$$\forall A < 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A\,.$$

Regardons à la main un exemple, la suite $u_n = n^2$. Elle tend vers $+\infty$. La preuve en est que si on prend n_0 un entier plus grand que $\sqrt{A}$, alors pour tout $n \geq n_0$ on aura

$$u_n = n^2 \geq n_0^2 \geq A\,.$$

Pour finir, un peu de vocabulaire : une suite (u_n) est

– *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

– *minorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

– *bornée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On ne rappelle pas les définitions usuelles de suites *croissantes*, *décroissantes*, *monotones*.

Un résultat très important et utile.

Théorème 2.4.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration Si $\lim u_n = l$ alors on sait que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour $n \geq n_0$ la suite est bornée :

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l| \ .$$

Les termes u_n pour $n \leq n_0$ étant en nombre fini, ils admettent aussi une borne. La suite (u_n) est donc toute entière bornée. □

2.5 Propriétés des limites

Le premier résultat porte sur les opération élémentaires concernant les limites : addition, multiplication, etc.

Théorème 2.5.1 (Opérations sur les limites)

1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $l, l' \in \mathbb{R}$ respectivement. Alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent respectivement vers $l + l'$ et ll'. De plus, si (v_n) ne prend jamais la valeur 0 et si $l' \neq 0$ alors (u_n/v_n) converge vers l/l'.

2) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $l \in \mathbb{R}$ et $+\infty$ respectivement. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $+\infty$ si $l > 0$, vers $-\infty$ si $l < 0$ et est indéterminée si $l = 0$. Enfin, si (v_n) ne prend jamais la valeur 0 alors (u_n/v_n) converge vers 0.

3) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $+\infty$. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $+\infty$. La suite (u_n/v_n) a un comportement indéterminé.

Démonstration

1) Nous commençons par l'addition des limites. Si $\lim u_n = l$ et si $\lim v_n = l'$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ et $n_0'(\varepsilon)$ dans $\mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et pour $n \geq n_0'(\varepsilon)$ on ait $|v_n - l'| \leq \varepsilon$. On a alors

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \; .$$

Donc en prenant $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon/2) \, , \, n_0'(\varepsilon/2)\}$, on voit que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

Ce qui démontre la convergence voulue.

Nous démontrons maintenant le produit des limites. On garde les mêmes notations que ci-dessus. Par le Théorème 2.4.1, la suite (v_n) est bornée par une borne M'. On a

$$\begin{aligned} |u_n v_n - l l'| &\leq |u_n v_n - l v_n| + |l v_n - l l'| \\ &\leq M' \, |u_n - l| + |l| \, |v_n - l'| \; . \end{aligned}$$

Prenons, par exemple

$$n_0 = \max\{n_0\left(\varepsilon/(2M')\right), n_0'\left(\varepsilon/(2\,|l|)\right) \; .$$

Pour $n \geq n_0$ on a donc

$$M' \, |u_n - l| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad |l| \, |v_n - l'| \leq \varepsilon/2$$

et donc pour $n \geq 0$ on a $|u_n v_n - l l'| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence annoncée.

Il reste à démontrer le quotient des limites. Pour cela il suffit de montrer simplement que $\lim 1/v_n = 1/l'$, car après il ne reste plus qu'à appliquer la règle pour le produit.

Calculons un peu :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{v_n - l'}{v_n \, l'} \right| \, .$$

Comme la suite (v_n) tend vers $l' \neq 0$, il existe m_0 tel que pour tout $n \geq m_0$ on ait $|v_n| \geq |l'|/2$. Le reste de la suite $|v_0|, |v_1|, \ldots, |v_{m_0-1}|$ est finie et tous les termes sont strictement positifs, donc c'est minoré par un $m > 0$. En conclusion, il existe un $M > 0$ tel que $|v_n| \geq M$ pour tout n. Ce qui donne là-haut :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{v_n - l'}{v_n \, l'} \right| \leq \frac{1}{M \; |l'|} \, |v_n - l'| \; .$$

Ensuite il est facile de conclure comme on l'a déjà fait deux fois ci-dessus.
2) Si $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. En particulier, dans ce cas on a $u_n \geq l - \varepsilon$. Soit $A > 0$ fixé et soit $A' = A - l + \varepsilon$. Il existe un n_0' tel que pour $n \geq n_0'$ on ait $v_n \geq A'$.

Si on pose $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon), n_0'\}$ alors pour $n \geq n_0$ on a

$$v_n + u_n \geq A' + l - \varepsilon = A\,.$$

On a démontré la convergence vers $+\infty$.

Quant à la suite $(u_n v_n)$, si la limite l est strictement positive, prenons $0 < \varepsilon < l/2$, on a pour n suffisamment grand

$$u_n v_n \geq (l - \varepsilon)A$$

et la conclusion suit facilement. Le cas $l < 0$ se fait de manière analogue.

Montrons que $(1/v_n)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A = 1/\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $v_n \geq A$. On a donc $0 < 1/v_n \leq 1/A = \varepsilon$. Cela démontre la convergence voulue.
3) Faisons ça un peu plus rapidement, pour n assez grand on a

$$u_n + v_n \geq \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A\,.$$

D'où la première propriété. De même, pour n assez grand on a

$$u_n v_n \geq \sqrt{A}\,\sqrt{A} = A\,.$$

D'où la seconde propriété.

Enfin, pour terminer, voyons, à travers des exemples, que les cas dits 'indéterminées" peuvent effectivement donner lieu à tous les scénarios.
Tout d'abord la situation "$0 \times \infty$", qui vaut aussi pour "∞/∞". Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. La suite $u_n = 1/n^\alpha$ tend vers 0, la suite $v_n = n^\beta + \gamma$ tend vers $+\infty$. Le produit $u_n v_n$ tend vers 0 si $\alpha > \beta$, vers $+\infty$ si $\alpha < \beta$ et vers $\gamma \in \mathbb{R}$ si $\alpha = \beta$. On peut donc avoir toutes les limites possibles.

On peut même ne pas avoir de limite du tout : $v_n = (2 + (-1)^n)n$ tend vers $+\infty$, la suite $u_n = 1/n$ tend vers 0 et pourtant la suite $u_n v_n = 2 + (-1)^n$ n'a pas de limite.

Voyons maintenant les cas de type "$(+\infty) + (-\infty)$", ou "$(+\infty) - (+\infty)$". Si on prend $u_n = n^\alpha$ et $v_n = n^\beta + \gamma$, elles tendent toutes les deux vers $+\infty$. Pourtant $v_n - u_n$ tend vers $+\infty$ si $\beta > \alpha$, tend vers $-\infty$ si $\beta < \alpha$ et vers γ

si $\alpha = \beta$. Enfin, en prenant $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = n$ on a un exemple où $u_n - v_n$ n'a pas de limite. □

Le théorème suivant est souvent très utile pour montrer qu'une suite a une limite donnée.

Théorème 2.5.2 (Théorème des gendarmes) *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) 3 suites réelles.*
1) Si les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite $l \in \mathbb{R}$, et si on a

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = l$.
2) Si (u_n) a pour limite $+\infty$ et si

$$u_n \leq v_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = +\infty$.
3) Si (w_n) a pour limite $-\infty$ et si

$$v_n \leq w_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = -\infty$.

Démonstration Faisons le cas 1) en détails, les autres cas sont laissés comme exercices.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n\,, \\ |u_n - l| \leq \varepsilon\,, \\ |w_n - l| \leq \varepsilon\,. \end{cases}$$

En particulier on a

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n\,, \\ l - \varepsilon \leq u_n\,, \\ w_n \leq l + \varepsilon\,. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$l - \varepsilon \leq v_n \leq l + e \quad \Longleftrightarrow \quad |v_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

□

Enfin nous terminons sur un théorème très important d'existence de limite.

Théorème 2.5.3 *Toute suite monotone admet une limite. Plus précisement:*
1) Toute suite croissante majorée admet une limite finie

$$l = \sup\{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

2) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3) Toute suite décroissante minorée admet une limite finie

$$l = \inf\{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

4) Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration
1) C'est une conséquence assez simple de la caractérisation du sup (Théorème 1.4.3). L'ensemble

$$A = \{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide et majoré par hypothèse. Il admet donc un sup noté l. Par le Théorème 1.4.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $l - a \leq \varepsilon$. Autrement dit, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l - u_{n_0} \leq \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a forcement, pour tout $n \geq n_0$

$$l - u_n \leq \varepsilon\,.$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.
2) Si la suite est non majorée cela veut dire que pour tout $A > 0$ il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$. Mais comme la suite est croissante, cela veut dire que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$. C'est exactement la définition du fait que $\lim u_n = +\infty$.

Les autres cas ont traités de manière identique. $\square$

Théorème 2.5.4 (Suites adjacentes) *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que* $u_n \leq v_n$ *(au moins à partir d'un certain rang). Si* $\lim v_n - u_n = 0$ *alors* (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes et ont même limite finie.*

Démonstration On a $u_n \leq v_n$, mais comme (v_n) est décroissante, on a $u_n \leq v_0$. Et cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (u_n) est majorée. Par le Théorème 2.5.3 elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$.

Avec le même genre de raisonnement (v_n) est décroissante minorée donc convergente vers un l'. Mais si on veut que $\lim u_n - v_n = 0$ il faut que $l = l'$. $\square$

2.6 Sous-suites

Soit (u_n) une suite réelle. Une *sous-suite* de (u_n) est une suite

$$v_k = u_{n_k}\,,\ k \in \mathbb{N}$$

où (n_k) est une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Lemme 2.6.1 *Toute suite strictement croissante (n_k) dans $\mathbb{N}$ vérifie $n_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier elle tend vers $+\infty$.*

Démonstration C'est vrai pour $k = 0$. On raisonne ensuite par récurence : si $n_k \geq k$, comme $n_{k+1} > n_k$ cela donne $n_{k+1} > k$ et donc $n_{k+1} \geq k + 1$. $\square$

Au lieu de sous-suite, on parle parfois de *suite extraite*.

Proposition 2.6.2 *Si (u_n) est une suite ayant pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ alors toute sous-suite de (u_n) converge vers la même limite. En particulier si une suite (u_n) admet des sous-suites ayant des limites différentes alors (u_n) n'admet pas de limite.*

Démonstration Nous donnons la preuve dans le cas où la limite est $l \in \mathbb{R}$. Les autres cas sont laissés au lecteur. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Soit (u_{n_k}) une sous-suite de (u_n). Soit k_0 tel que $n_{k_0} \geq n_0$, alors pour $k \geq k_0$ on a $n_k \geq n_0$ et donc $|u_{n_k} - l| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence annoncée.

La deuxième remarque vient juste de la contraposée de la propriété établie ci-dessus. $\square$

Notre but maintenant est de démontrer un théorème fondamental de l'analyse, le théorème de Bolzano-Weierstrass. Tout d'abord une première étape.

Théorème 2.6.3 (Théorème de Ramsey) *Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.*

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle. On considère l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N}\,;\ \forall k > n\,,\ u_k < u_n\}\,.$$

Concernant cet ensemble A deux cas se présentent : ou bien A est fini (y compris vide), ou bien il est infini.

Si A est fini ou vide, il admet un élément maximal n_0 (on pose $n_0 = -1$ dans le cas où A est vide). On pose $p_0 = n_0 + 1$, donc $p_0 \notin A$. Par définition de A, on sait qu'il existe $p_1 > p_0$ tel que $u_{p_1} \geq u_{p_0}$ (car sinon $p_0 \in A$). De même, il existe $p_2 > p_1$ tel que $u_{p_2} \geq r_{p_1}$ car sinon $p_1 \in A$. Et ainsi de suite, par récurrence on construit une suite strictement croissante d'entier (p_k) tels que $u_{p_{k+1}} \geq u_{p_k}$ pour tout k. On a bien construit une sous-suite croissante de (u_n).

Si A est infini, alors on peut écrire $A = \{p_n \, ; \; n \in \mathbb{N}\}$ où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers. On a en particulier $u_{p_{n+1}} < u_{p_n}$ par définition de A. Ainsi la sous-suite (u_{p_n}) est décroissante. □

Théorème 2.6.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle bornée. Par le Théorème de Ramsey elle admet une sous-suite monotone. Cette sous-suite monotone est aussi bornée, donc par le Théorème 2.5.3, elle est convergente. □

2.7 $\liminf$ et $\limsup$ (hors programme)

Soit (u_n) une suite réelle, bornée pour commencer. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \sup\{u_p \, ; \; p \geq n\} \, .$$

La suite (M_n) est décroissante, car pour $m \geq n$ l'ensemble $\{u_p \, ; \; p \geq m\}$ est inclus dans $\{u_p \, ; \; p \geq n\}$ et donc son sup est forcément plus petit. La suite (M_n) est aussi bornée, comme (u_n), donc elle admet une limite finie (Théorème 2.5.3) que l'on note

$$\limsup u_n \, ,$$

la *limite supérieure* de (u_n). Notez bien que cette limite existe toujours, quelque soit la suite bornée (u_n). Notez aussi que

$$\limsup u_n = \lim_{n \to +\infty} \sup_{p \geq n} u_p \, .$$

Maintenant pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$m_n = \inf\{u_p \, ; \; p \geq n\} \, .$$

La suite (m_n) est croissante, car pour $m \geq n$ l'ensemble $\{u_p \, ; \; p \geq m\}$ est inclus dans $\{u_p \, ; \; p \geq n\}$ et donc son inf est forcément plus grand. La suite (m_n) est aussi bornée, comme (u_n), donc elle admet une limite finie (Théorème 2.5.3) que l'on note

$$\liminf u_n \, ,$$

la *limite inférieure* de (u_n). Notez bien que cette limite existe toujours, quelque soit la suite bornée (u_n). Notez aussi que

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} u_p\,.$$

Dans le cas où la suite (u_n) est non majorée on pose $\limsup u_n = +\infty$; la suite (m_n) est croissante mais non majorée, elle peut tendre vers une limite finie aussi bien que vers $+\infty$. Dans ce dernier cas on a aussi $\liminf u_n = +\infty$. Si la suite (u_n) est non minorée on pose $\liminf u_n = -\infty$. ; la suite (M_n) est décroissante mais non minorée, elle peut tendre vers une limite finie, aussi bien que vers $-\infty$. Dans ce cas on a aussi $\limsup u_n = -\infty$.

Notez que l'on a toujours

$$\limsup u_n \geq \liminf u_n$$

(exercice).

Voici la principale application de ces notions de lim inf et lim sup.

Théorème 2.7.1 *Une suite réelle (u_n) admet une limite $l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ si et seulement si*

$$\limsup u_n = \liminf u_n\,,$$

auquel cas la limite l de (u_n) est cette valeur commune de $\limsup u_n$ *et* $\liminf u_n$.

Démonstration Dans un sens. Si (u_n) tend vers $l \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier pour $n \geq n_0$ on a

$$\sup_{p\geq n} u_p \leq l + \varepsilon\,.$$

Ce qui prouve que $\limsup u_n \leq l+\varepsilon$. Comme ceci est vrai quelque soit ε on a $\limsup u_n \leq l$. De même pour $n \geq n_0$ on a

$$\inf_{p\geq n} u_p \geq l - \varepsilon\,.$$

Ce qui prouve que $\liminf u_n \geq l - \varepsilon$. Comme ceci est vrai quelque soit ε on a $\limsup u_n \geq l$. Comme $\limsup u_n \geq \liminf u_n$ cela implique que les deux limites sont égales à l.

Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors elle est non majorée et donc $\limsup u_n = +\infty$. De plus, pour tout $A > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$. Ce qui veut dire que $\inf_{p\geq n} u_n \geq A$ pour $n \geq n_0$ et donc que $m_n \geq A$ (avec les notations de ci-dessus). Donc la suite croissante (m_n) tend vers $+\infty$ et $\liminf u_n = +\infty$.

Le cas de la limite $-\infty$ se traite exactement de la même façon.

Nous montrons maintenant la réciproque. Si $\limsup u_n = \liminf u_n = l \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$\sup_{p\geq n} u_p \leq l + \varepsilon \quad \text{et} \quad \inf_{p\geq n} u_p \geq l - \varepsilon\,.$$

En particulier, $|u_p - l| \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq n_0$. Ce qui démontre la convergence annoncée.

Nous laissons au lecteur les autres cas en exercice. □

2.8 Le critère de Cauchy

La plupart du temps, pour montrer qu'une suite est convergente il faut avoir une intuition de ce que vaut sa limite et ensuite montrer cette convergence ($|u_n - l| \leq \varepsilon$). Le résultat que nous allons établir ici est fondamental. Il caractérise le fait qu'une suite converge (vers une limite finie) sans que l'on ait besoin de connaître cette limite.

On dit qu'une suite (u_n) est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ p, q \geq n_0 \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon\,.$$

Lemme 2.8.1 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit n_0 tel que décrit ci-dessus. On a en particulier

$$|u_p - u_{n_0}| \leq \varepsilon$$

pour tout $p \geq n_0$. Donc la suite (u_n) est bornée à partir de n_0. Elle est donc bornée. □

Théorème 2.8.2 (Critère de Cauchy) *Une suite réelle (u_n) converge vers une limite finie si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration Si (u_n) tend vers l, alors (en faisant court, avec les notations habituelles maintenant), on a pour $p, q \geq n_0$

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq 2\varepsilon\,.$$

Donc elle est de Cauchy.

Réciproquement si (u_n) est de Cauchy alors elle est bornée par le lemme ci-dessus. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une sous-suite convergente (u_{n_k}), de limite l. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq n_0$ on ait $|u_{n_k} - l| \leq \varepsilon/2$ et tel que pour $p, q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| \leq \varepsilon/2$. Soit $k \geq n_0$ on a $n_k \geq k$ (par le Lemme 2.6.1) et

$$\begin{aligned}|u_k - l| &\leq |u_k - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que (u_n) converge vers l. □

2.9 Les suites complexes

Le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ plutôt que $\mathbb{R}$ ne diffère pas beaucoup du cas réel. La seule vraie différence vient de ce qu'il n'existe pas d'ordre total sur $\mathbb{C}$. Ainsi on utilise pas de notion d'ordre sur $\mathbb{C}$ et certaines notions sur les suites disparaissent sur $\mathbb{C}$: suites croissantes ou décroissantes, $+\infty$, $-\infty$, sup, inf, lim sup, lim inf, etc.

Pour ce qui concerne la convergence simple vers une valeur finie les choses changent peu, il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules ! En effet, une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{C}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Une suite complexe (u_n) admet une *partie réelle* (x_n) et une *partie imaginaire* (y_n) qui sont des suites réelles telles que $u_n = x_n + iy_n$ pour tout n.

Il est facile de montrer que la suite (u_n) converge dans $\mathbb{C}$ vers $l = x + iy$ si et seulement si (x_n) converge vers x et (y_n) converge vers y.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass et le critère de Cauchy restent vrais dans le cas complexe.

2.10 Approximation des réels

Avec le langage des suites et des limites nous pouvons maintenant revenir sur les nombres réels et leur propriétés d'approximations.

Tout d'abord revenons sur le sup.

Théorème 2.10.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré, soit $\alpha = \sup A$. Alors il existe une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim u_n = \alpha$.*

Ce résultat reste aussi valable lorsque A est non vide mais non majoré, i.e. que $\sup A = +\infty$.

Démonstration D'après le Théorème 1.4.3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_n \in A$ tel que $\alpha - u_n \leq 1/n$. La suite (u_n) ainsi construite vérifie bien les propriétés annoncées.

Si l'ensemble A est non majoré, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n \in A$ tel que $u_n \geq n$. La suite (u_n) est incluse dans A et tend bien vers $+\infty$. □

Revenons maintenant sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.10.2 *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lim q_n = r$.*

Démonstration On utilise le Théorème 1.4.2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $q_n \in]r, r + 1/n[$. Cette suite (q_n) vérifie les propriétés annoncées (en utilisant le théorème des gendarmes). □

Dans le théorème ci-dessus on voit bien qu'il y a plein de suites de rationnels qui convergent vers r et que de plus la démonstration du théorème ci-dessus ne donne pas de procédé constructif pour construire une telle suite. Nous allons maintenant passer un peu sur une approximation rationnelle très importante : le développement décimal.

Théorème 2.10.3 *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe une suite unique (m_n) tels que :*
- *$m_0 \in \mathbb{Z}$ et pour pour $n \geq 1$ on ait $m_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$,*
- *la suite (m_n) ne termine pas par une suite infinie de 9,*
- *on ait*

$$r = \lim_{n \to +\infty} m_0 + \sum_{k=1}^{n} m_k \, 10^{-k} .$$

Démonstration On pose $m_0 = E[r]$ et $r_1 = r - m_0$. On a alors $r_1 \in [0, 1[$ et donc $10r_1 \in [0, 10[$. Soit $m_1 = E[r_1]$, on a donc bien $m_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Notez qu'on a

$$r = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{r_2}{10} .$$

On pose $r_2 = 10r_1 - m_1 \in [0, 1[$. Et ainsi de suite, on construit par récurrence, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, une famille $(m_n)_{1 \leq n \leq N}$ dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ telle que

$$r = m_0 + \sum_{k=1}^{N} m_k \, 10^{-k} + \frac{r_{N+1}}{10^N}$$

avec $r_{N+1} \in [0,1[$. Si on pose $q_N = m_0 + \sum_{k=1}^{N} m_k\, 10^{-k}$, on a alors $|r - q_N| \leq 10^{-N}$ et donc $\lim q_N = r$. On a démontrer l'existence de la suite vérifiant la troisième propriété.

Pour le moment rien n'empêche cette suite de terminer par une infinité de 9. Mais notez que si

$$x = 0,00\ldots 009999999\ldots = 10^{-N_0} \times 0,9999999\ldots$$

alors, comme nous l'avons montré en début de chapitre, on a aussi

$$x = 10^{-N_0} \times 1 = 10^{-N_0} = 0,00\ldots 01\,.$$

On conclut facilement.

Il reste à montrer l'unicité. Admettons que l'on ait deux telles suites (m_n) et (p_n). On a en particulier

$$E[r] = m_0 = p_0\,.$$

Ensuite

$$E[10(r - m_0)] = m_1 = p_1\,.$$

Et ainsi de suite, on conclut facilement par récurrence. □

L'unique suite associée à $r \in \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ci-dessus est appelée *développement décimal de* r.

On connaît tous au moins une partie du développement décimal de π :

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\ldots$$

qui ne s'arrête pas. On connaît aujourd'hui des milliards de décimales de π.

Mais comment reconnaître dans un développement décimal qu'un nombre est rationnel ou irrationnel ? C'est une propriété très remarquable du développement décimal que l'on puisse faire la différence. On dit qu'un développement décimal (m_n) associé à r est *périodique à partir d'un certain rang* si au delà d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ la suite (m_n) est périodique, y compris le cas d'un développement fini (on considère qu'il y a une suite de 0 pour finir.

Théorème 2.10.4 *Soit $r \in \mathbb{R}$ de développement décimal (m_n). Alors r est rationnel si et seulement si (m_n) est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration Tout d'abord montrons que tout nombre rationnel a son développement décimal qui est périodique. Soit $r = p/q$ un rationnel, que l'on peut supposer appartenant à $[0,1[$, après lui avoir retiré sa partie entière. Si on regarde la construction de la suite (m_n) correspondant à son développement décimal, on voit que cela correspond à effectuer la division euclidienne de p par q. En effet, multiplier par 10 correspond à "abaisser le 0", ensuite comme $p < q$ la division de $10p$ par q donne un diviseur appartenant à $\{0, 1, \ldots, 9\}$ et un reste appartenant à $\{0, 1, \ldots q-1\}$. Et ainsi de suite.

Deux scénarios sont alors possibles : soit le reste est à un moment 0, la division s'arrête et elle est donc périodique, soit elle ne finit pas. Mais comme les différents restes appartiennent à un ensemble fini $\{0, 1, \ldots q-1\}$, forcement à un moment la suite des reste repasse par la même valeur. Alors la division euclidienne donnera le même diviseur, le même reste etc. La suite devient périodique. Faite par exemple la division à la main de 1 par 7.

Nous montrons maintenant pour conclure que tout réel r dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang est forcément un rationnel. Un tel réel s'écrit comme un rationnel $m_0, m_1\, m_2\, \ldots m_{n_0}$ plus la partie périodique :

$$s = 0,00\ldots 00\, p_1\, p_2\, \ldots p_K\, p_1\, p_2\, \ldots\, p_K\, \ldots$$

On a

$$\begin{aligned} 10^{n_0} s &= 0, p_1\, p_2\, \ldots p_K\, p_1\, p_2\, \ldots\, p_K\, \ldots \\ 10^{n_0+K} s &= p_1\, p_2\, \ldots p_K,\, p_1\, p_2\, \ldots\, p_K\, \ldots \\ 10^{n_0+K} s - p_1\, p_2\, \ldots p_K &= 0, p_1\, p_2\, \ldots p_K\, p_1\, p_2\, \ldots\, p_K\, \ldots \\ 10^{n_0+K} s - p_1\, p_2\, \ldots p_K &= 10^{n_0} s\,. \end{aligned}$$

Ainsi s est rationnel. □

Remarque : Il est important de noter que tout ce que nous avons fait ici avec le développement en base 10 peut se faire de même avec n'importe quelle autre base. En particulier il y a une autre base qui est vraiment importante parfois, c'est la base 2. On parle alors de *décomposition dyadique* des réels.

Chapter 3

Fonctions d'une variable réelle

3.1 Définitions de base, terminologie

Une *fonction réelle* est une application f d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. C'est à dire qu'à tout élément $x \in D$ la fonction f associe une valeur $f(x) \in A$. On note ça :

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & f(x)\,. \end{array}$$

On note f la fonction et $f(x)$ sa valeur au point x. Pour parler d'une fonction précise on peut par exemple parler de la fonction $x \mapsto x^2$.

Pour un $x \in D$, la valeur $y = f(x) \in A$ est l'*image* de x par f. Inversement x est l'*antécédent* de y.

L'ensemble D est le *domaine* de f, c'est l'ensemble des points où la fonction est bien définie. On le note parfois $\mathrm{Dom}\, f$

L'ensemble

$$\{f(x)\,;\ x \in D\}$$

est l'*image* de f, on le note $\mathrm{Im}\, f$ ou $\mathrm{Ran}\, f$.

Plus généralement, pour tout ensemble $E \subset \mathrm{Dom}\, f$ on note

$$f(E) = \{f(x)\,;\ x \in E\}\,.$$

Pour tout ensemble $F \subset \mathrm{Ran}\, f$ on note

$$f^{-1}(F) = \{x \in \mathrm{Dom}\, f\,;\ f(x) \in F\}\,.$$

Enfin, le *graphe* de f est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\,;\ x \in \mathrm{Dom}\, f\}\,.$$

Une fonction f est dite *injective* si pour tout $x \neq y \in \mathrm{Dom}\, f$ on a $f(x) \neq f(y)$. Cela veut dire en particulier que tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$ a un unique antécédent.

Une fonction f est dite *surjective sur* $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $y \in A$ il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, si tout élément de A admet un antécédent.

Une fonction $f\ : D \to A$ est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, pour tout $y \in A$ il existe un unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Cet unique x associé à y est noté $f^{-1}(y)$. On définit ainsi une nouvelle fonction

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & A & \longrightarrow & D \\ & & y & \longmapsto & f^{-1}(x)\,. \end{array}$$

Notez bien la relation importante

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y\,.$$

La fonction f^{-1} est la *fonction réciproque* de f.

Notez que f^{-1} est alors aussi bijective (exercice) et que $(f^{-1})^{-1} = f$ (exercice).

Proposition 3.1.1 *Si f est bijective alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $(y = x)$.*

Démonstration Soit (a, b) un point de Γ_f, alors cela veut dire qu'il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que $a = x$ et $b = f(x)$. Le symétrique de ce point par rapport à $(y = x)$ est le point (b, a), c'est à dire $(b, f^{-1}(b))$. C'est donc bien un point de $\Gamma_{f^{-1}}$. Ainsi le symétrique de Γ_f est inclus dans $\Gamma_{f^{-1}}$.

Avec un raisonnement en tout point similaire on voit que le symétrique de $\Gamma_{f^{-1}}$ est inclus dans Γ_f. On conclut facilement. □

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $\mathrm{Ran}\, f \subset \mathrm{Dom}\, g$. On peut alors définir la fonction *composée*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f & : & \mathrm{Dom}\, f & \longrightarrow & \mathrm{Ran}\, g \\ & & x & \longmapsto & g(f(x))\,. \end{array}$$

Notez que, si f est bijective alors $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$ et que $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$.

On dit qu'une fonction $f\ :\ D \to A$ est *croissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) \leq f(y)$. Elle est *strictement croissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) < f(y)$.

On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est *décroissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) \geq f(y)$. Elle est *strictement décroissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) > f(y)$.

Dans tous les cas on dit que f est *monotone*, resp. *strictement monotone*.

Vous noterez qu'une fonction strictement monotone est injective. Le contraire n'est pas vrai, je vous laisse trouver tout seul un contre exemple.

3.2 Exemples

Voici une première petite liste de fonctions usuelles.

3.2.1 Fonctions affines

Ce sont toutes les fonctions de la forme

$$f(x) = ax + b$$

pour un a et un b fixés dans $\mathbb{R}$. Le graphe est à chaque fois une droite.

Elles sont toutes définies sur $\mathbb{R}$.

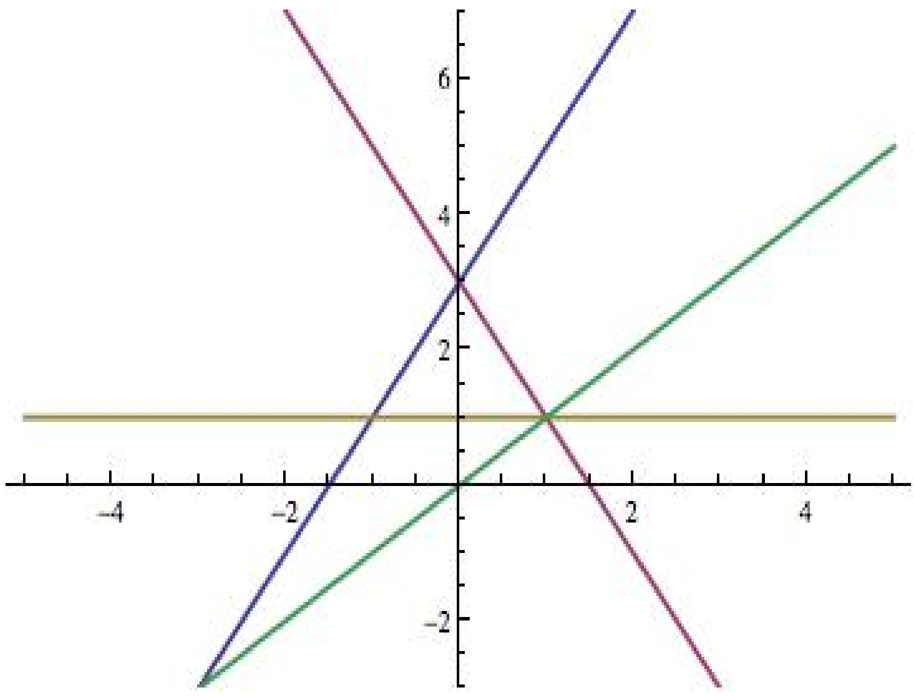

Figure 3.1: $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = 2x + 3$, $f(x) = -2x + 3$

3.2.2 Fonctions puissances

Tout d'abord les puissances entières : $f(x) = x^n$, pour un $x \in \mathbb{N}$. Fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

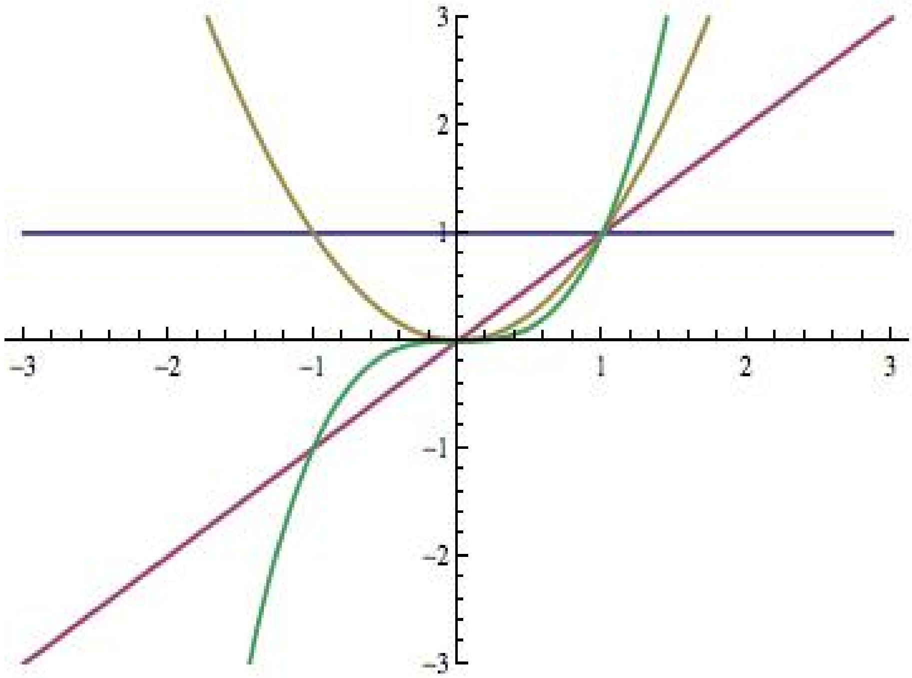

Figure 3.2: $f(x) = x^0$, $f(x) = x^1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$

Ensuite les inverses de puissances entières : $f(x) = x^{-n}$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^*$.

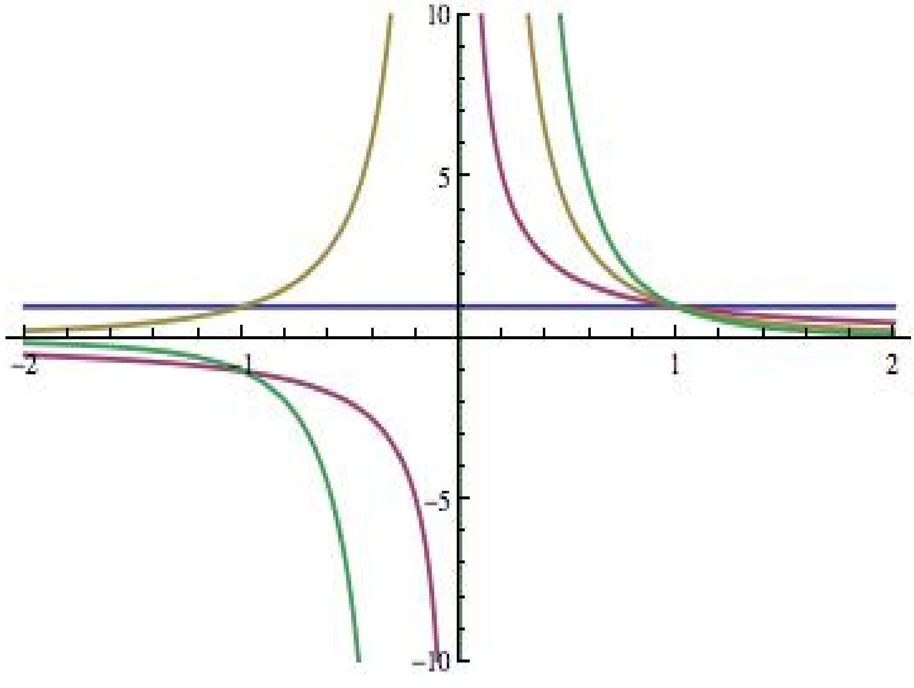

Figure 3.3: $f(x) = 1/x^0$, $f(x) = 1/x^1$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = 1/x^3$

Ensuite les racines n-ièmes : $f(x) = x^{1/n}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

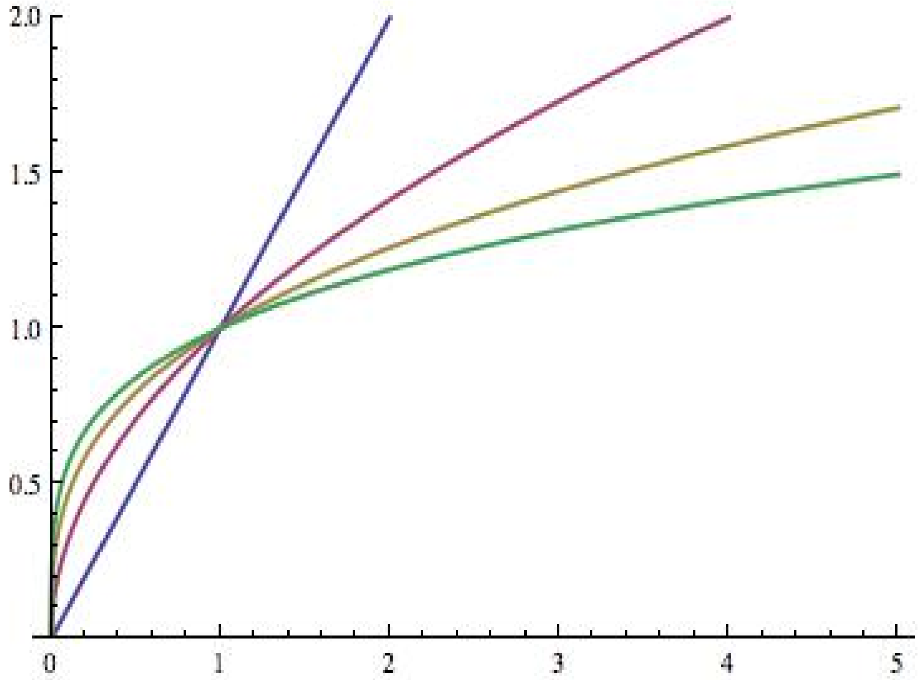

Figure 3.4: $f(x) = x^{1/1}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$, $f(x) = x^{1/4}$

Notez que quand n est impair, on peut définir $x^{1/n}$ sur tout $\mathbb{R}$ en posant

$$x^{1/n} = -(-x)^{1/n} .$$

C'est encore l'unique réel y tel que $y^n = x$. Lorsque n est pair il n'y a pas de telle extension.

La combinaison de toutes ces fonctions puissances permet de définir les *fonction puissances rationnelles*. En effet, soit $q \in \mathbb{Q}$, de la forme $q = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x > 0$ on pose

$$x^q = x^{a/b} = (x^{1/b})^a = (x^a)^{1/b}\,.$$

Les fonctions puissances rationnelles sont donc définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

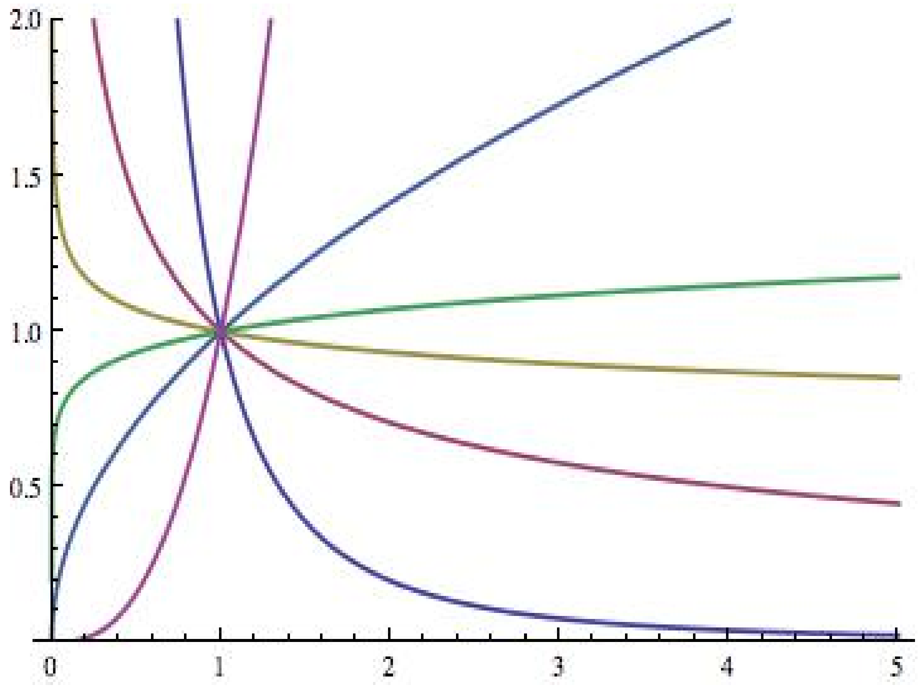

Figure 3.5: $f(x) = x^{-7/3}$, $f(x) = x^{-1/2}$, $f(x) = x^{-1/10}$, $f(x) = x^{1/10}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{8/3}$

Notez les propriétés importantes suivantes qui se démontrent facilement (exercice).

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ 1^q &= 1 \\ x^{a+b} &= x^a\,x^b \\ x^{ab} &= (x^a)^b\,. \end{aligned}$$

Notez que c'est de là que viennent les notations x^{-n}, $x^{1/n}$. En effet :

$$x^n\,x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$$

donc

$$x^{-n} = 1/x^n\,.$$

De même

$$(x^{1/n})^n = x^1 = x$$

donc $x^{1/n}$ est la racine n-ième de x.

On appelle *fonctions homographiques* les fonctions de la forme

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c, d sont des réels, avec $c \neq 0$. Notez qu'on a alors

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}\,.$$

Si $bc = ad$ alors la fonction f est constante. Sinon, en translatant le graphe de f du vecteur $(d/c, a/c)$ on obtient

$$f\left(x - \frac{d}{c}\right) - \frac{a}{c} = \frac{b - \frac{ad}{c}}{x}\,,$$

et en appliquant une homothétie de coefficient $c/(bc-ad)$ on obtient le graphe de $1/x$.

3.2.3 Valeur absolue et partie entière

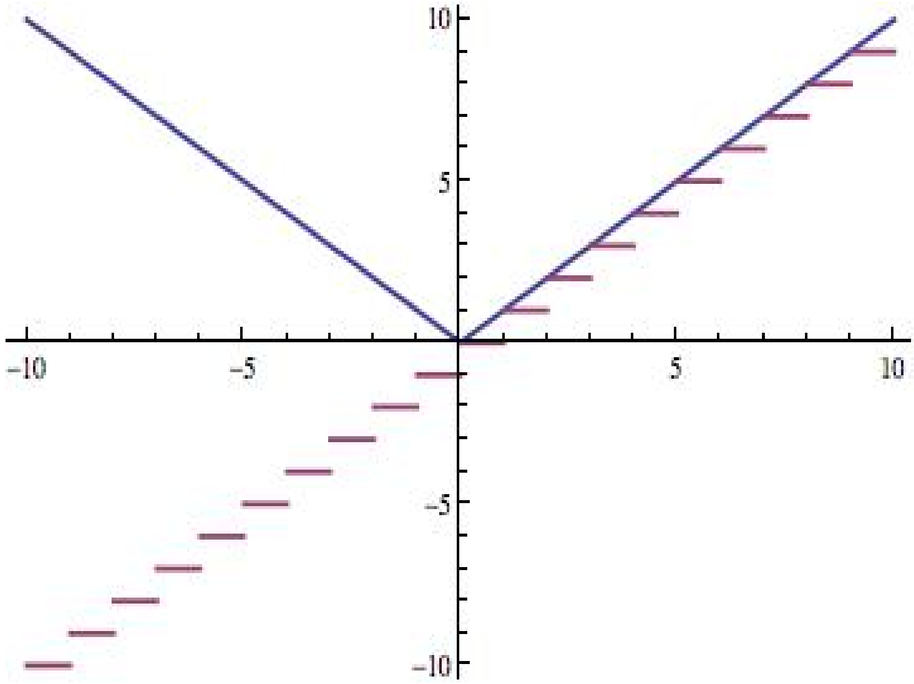

Figure 3.6: $f(x) = |x|$, $f(x) = E[x]$

3.2.4 Autres fonctions

Citons quelques autres fonctions que nous verrons plus en détails plus tard.

Les fonctions *exponentielle* et *logarithme*.

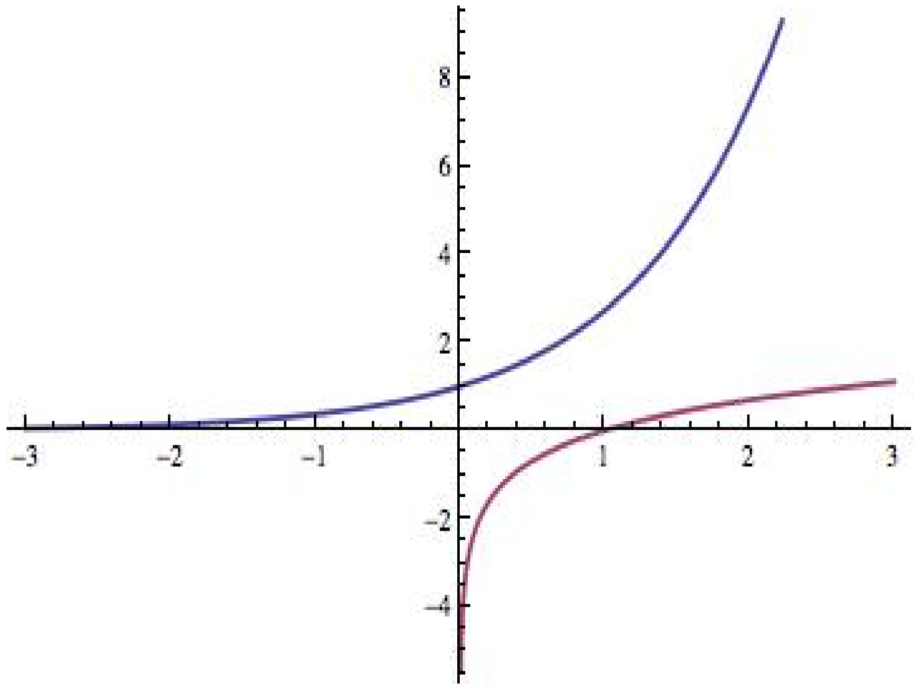

Figure 3.7: $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$

Les fonctions trigonométriques *cosinus*, *sinus*, *tangente*.

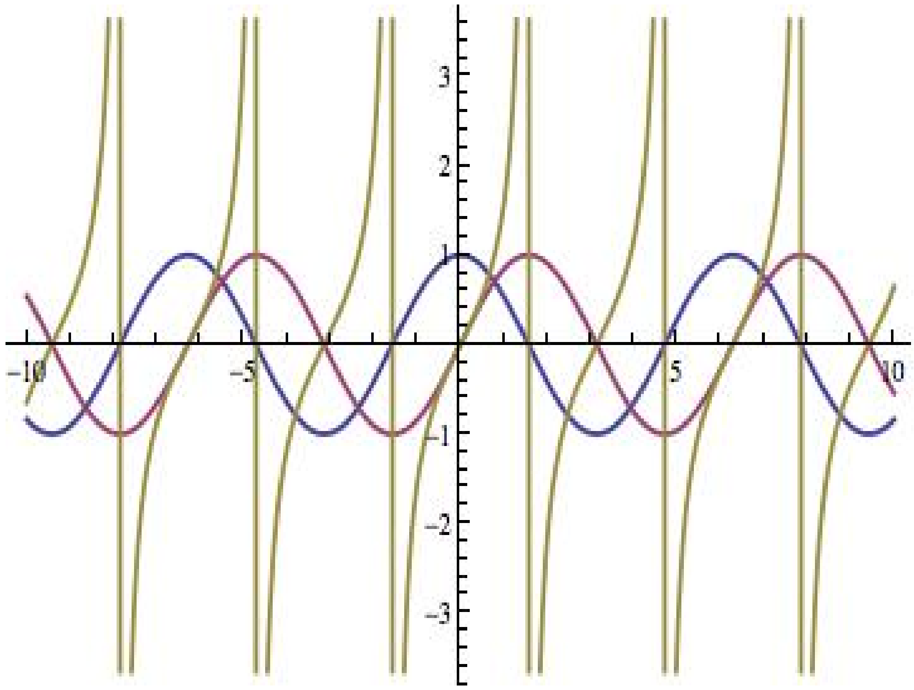

Figure 3.8: $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \tan(x)$

3.3 Limites

La définition des limites pour les fonctions est assez proche de ce que l'on a vu pour les suites. La différence vient essentiellement du fait que pour les suites on ne pouvait considérer que la limite quand n tend vers $+\infty$. Pour une fonction f on peut considérer la limite de f en tout point de son domaine, ou du bord de son domaine.

L'idée de base est la même. On dit que la limite de f est b quand x tend vers a si, pour toute marge $\varepsilon > 0$ petite et choisie à l'avance, la fonction vérifie $|f(x) - b| \leq \varepsilon$ pour peu qu'on prenne x suffisamment proche de a, i.e. $|x - a| \leq \eta$, pour un certain η.

Voici les définitions.

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\,;\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0\,;\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si

$$\forall A < 0, \exists \eta > 0\,;\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0\,;\ x \geq B \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists B > 0\,;\ x \geq B \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si

$$\forall A < 0, \exists B > 0\,;\ x \geq B \implies f(x) \leq A\,.$$

Dans les études de limites de fonctions, les limites à gauche et à droite ont aussi beaucoup d'importance.

On dit que

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\,;\ a \leq x \leq a + \eta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\,;\ a - \eta \leq x \leq a \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0\,;\; a \leq x \leq a + \eta \leq \eta \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0\,;\; a - \eta \leq x \leq a \leq \eta \implies f(x) \geq A\,.$$

etc.