Cours d'Analyse
Semestre 2

Stéphane Attal

Contents

Chapter 1

Développements limités

Nous attaquons ici un autre chapitre fondamental de l'analyse : celui où l'on va aborder les développements limités. Il s'agit d'un outil fondamental pour l'étude fine du comportement des fonctions, c'est un outil redoutablement efficace pour le calcul de limites difficiles.

1.1 Comparaison de fonctions

Dans la suite D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, adhérent à $D \setminus \{a\}$. Les fonctions dont on parle sont toutes définies sur D.

On dit qu'une fonction f est *négligeable* devant une fonction g au voisinage de a, s'il existe une fonction ε sur D, telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)\,.$$

On écrit alors que $f = o(g)$ *au voisinage de* a.

Par exemple $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0, puisque $x^3 = x \times x^2$ et que $\varepsilon(x) = x$ tend vers 0 en 0. Ou encore $x^2 = o(x^5)$ au voisinage de $+\infty$, puisque $x^2 = x^5 \times 1/x^3$ etc.

Théorème 1.1.1 *Quelques soient* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *on a*

$$(\ln(x))^\alpha = o\left(x^\beta\right) \qquad \textit{et} \qquad x^\beta = o\left(e^{\gamma x}\right)\,,$$

au voisinage de $+\infty$ *et on a*

$$|\ln(x)|^\alpha = o\left(x^{-\beta}\right)$$

au voisinage de 0.

Démonstration Nous allons commencer par démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

Soit $x > 0$ et $p = E[x]$, on a

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^p}{p+1} \geq \frac{2^p}{p+1}\,.$$

Mais on peut facilement démontrer par récurrence que pour $n \geq 5$ on a

$$\frac{2^n}{n+1} \geq n\,.$$

En effet

$$\frac{2^{n+1}}{n+2} = \frac{2^n}{n+1}\,\frac{2(n+1)}{n+2} \geq \frac{2n(n+1)}{n+2}$$

qui est plus grand que $n+1$ dès que $n \geq 2$. Cela démontre la convergence annoncée.

En particulier, en élevant à la puissance β, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\beta} = +\infty\,,$$

pour tout $\beta > 0$. Maintenant, pour tout $\beta, \gamma > 0$ on a

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = \frac{e^{\beta\,\frac{\gamma x}{\beta}}}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\beta \left(\frac{\gamma x}{\beta}\right)^\beta}\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$ alors $y = \gamma x/\beta$ tend vers $+\infty$ aussi et donc

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = C\,\frac{e^{\beta y}}{y^\beta}$$

tend vers $+\infty$.

Nous avons ainsi démontré que $\lim_{x\to+\infty} x^\beta/e^{\gamma x} = 0$ ce qui prouve que $x^\beta = o(e^{\gamma x})$.

Regardons maintenant

$$\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta}\,.$$

Si on pose $y = \ln(x)$ la quantité ci-dessus s'écrit

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}}\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$ alors y aussi et donc $y^\alpha/e^{\beta y}$ tend vers 0. Ce qui prouve la relation voulue en $+\infty$.

Enfin, regardons au voisinage de 0, la limite de $|\ln(x)|^\alpha/x^{-\beta}$. Posons $y = 1/x$, la quantité ci-dessus vaut $|\ln y|^\alpha/y^\beta$. Quand x tend vers 0 alors y tend vers $+\infty$ et la quantité ci-dessus tend vers 0. □

Proposition 1.1.2

1) Au voisinage de a, si $f = o(g)$ et si $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

2) Au voisinage de a, si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1f_2 = o(g_1g_2)$.

3) Au voisinage de a, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$.

4) Au voisinage de a, si $f = o(g)$ alors $1/g = o(1/f)$.

Toutes les démonstrations des résultats ci-dessus sont évidentes et laissées au lecteur. Par contre, notez bien qu'il ne faut pas faire les erreurs suivantes.

– Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors il n'est pas vrai que $f_1+f_2 = o(g_1+g_2)$. En effet, on a au voisinage de 0, $x^2 = o(x)$ et $-x^3 = o(-x + x^2)$ mais par contre $x^2 - x^3$ n'est pas un $o(x^2)$.

– Avec les quotients de fonctions rien de général ne marche.

Notez qu'avec nos notations on écrit $f = o(1)$ au voisinage de a pour dire f tend vers 0 en a.

1.2 Equivalence de fonctions

On dit que f est *équivalente à g au voisinage de a* si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \,.$$

On note cela $f \sim_a g$, ou bien $f \sim g$ au voisinage de a. Notez que c'est équivalent à $f = g + o(g)$ au voisinage de a.

Théorème 1.2.1

1) La relation $\sim$ au voisinage de a est une relation d'équivalence entre fonctions : elle est symétrique, réflexive et transitive.

2) Si $f \sim_a g$ alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x\to a} g(x)$ existe. Dans ce cas les limites sont égales.

3) On peut prendre le produit, le quotient (si bien défini) et les puissances des équivalents.

4) Si $\lim_{x\to b} \phi(x) = a$ et si $f \sim_a g$ alors $f \circ \phi \sim_b g \circ \phi$.

Démonstration

1) Le fait que $f \sim_a f$ est une évidence.

Si $f \sim_a g$ alors $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Mais dans ce cas, en posant

$$\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)}$$

on a $\lim_{x\to a} \varepsilon'(x) = 0$ et $g(x) = (1 - \varepsilon'(x))f(x)$. Ainsi $g \sim_a f$.

Enfin, si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ alors $f = (1 + \varepsilon)g$ et $g = (1 + \varepsilon')h$ d'où $f = (1 + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon\varepsilon')h$ ce qui donne le résultat facilement.

2) On a $g(x) = (1 + \varepsilon(x))f(x)$ donc $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

4) On a $f(\phi(x)) = (1+\varepsilon(\phi(x)))g(\phi(x))$, mais $\lim_{x\to b} \varepsilon(\phi(x)) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

3) Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors

$$\begin{aligned}
f_1(x)f_2(x) &= (1 + \varepsilon_1(x))(1 + \varepsilon_2(x))g_1(x)g_2(x) \\
&= (1 + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))g_1(x)g_2(x)\,. \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \\
&= (1 + \varepsilon_1(x))(1 - \varepsilon_2'(x)) \frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,.
\end{aligned}$$

On passe facilement aux puissances $n \in \mathbb{Z}$ en itérant le résultat ci-dessus, du coup on passe aux puissances rationnelles (si les fonctions sont > 0). Pour les puissances quelconques, si f et g sont > 0 et $f \sim_a g$ alors

$$f(x)^\alpha = e^{\alpha \ln(f(x))} = e^{\alpha \ln((1+\varepsilon(x))g(x))} = e^{\alpha \ln(1+\varepsilon(x))} e^{\alpha \ln(g(x))}\,.$$

La limite de $e^{\alpha \ln(1+\varepsilon(x))}$ quand $x \to a$ est clairement 1, d'où le résultat. $\square$

Les erreurs à ne pas faire avec les équivalents :

– En général on ne peut pas additionner (ou soustraire) des équivalents. Par exemple $x^2 - x \sim_0 -x$ et $x \sim_0 x$, par contre $x^2 \not\sim_0 0$.

– On ne peut pas composer les équivalents par une fonction *à gauche*. Par exemple $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$, mais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

et donc $e^{x^2+x} \not\sim_{+\infty} e^{x^2}$.

Théorème 1.2.2 (Equivalents importants en 0)
$e^x \sim 1 + x$
$\ln(1 + x) \sim x$
$\sin(x) \sim x$
$\cos(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2}$
$\tan(x) \sim x$.

Non démontré pour le moment.

1.3 Dérivées successives

On commence par une petite partie avec des résultats assez simples sur les dérivées successives et aussi les fonctions convexes.

1.3.1 Un rappel

Si f est dérivable au point x_0, l'équation de la tangente au graphe de f qui passe par $(x_0, f(x_0))$ est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,, x \in \mathbb{R}\,.$$

Si f est seulement dérivable à droite et à gauche en x_0, le graphe admet des tangentes à droite et à gauche, d'équation

$$y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0)\,,\ x \geq 0 \ \text{ et } \ y - f(x_0) = f'_g(x_0)(x - x_0)\,,\ x \leq 0\,.$$

1.3.2 Définitions

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est *n fois dérivable en* $x_0 \in I$, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 tel que f soit $n - 1$ fois dérivable en tout point de J et sa dérivée $n - 1$-ième $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0. On note alors $f^{(n)}(x_0)$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ en x_0.

On dit que f fonction définie sur un intervalle ouvert I est *n fois dérivable sur I* si elle est n fois dérivable en tout point de I. Du coup, les dérivées successives $f^{(p)}$, $p = 1, \ldots, n$ sont des fonctions bien définies sur I. Notez que dans ce cas, les fonctions $f^{(p)}$, $p = 1, \ldots, n - 1$ sont forcement continues sur I. Par contre $f^{(n)}$ n'est pas forcement continue. On dit que f est C^n sur I si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Si $I=[a,b]$ est un intervalle fermé, on dit que f est *dérivable sur I* si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b. La fonction f' est alors la fonction

$$f'(x)=\begin{cases} f'(x) & \text{si } x\in]a,b[\,,\\ f'_d(a) & \text{si } x=a\\ f'_g(b) & \text{si } x=b\,.\end{cases}$$

De la même façon on définit les fonctions n fois dérivables sur $[a,b]$, ainsi que les fonction C^n sur $[a,b]$ (avec ici continuité à droite en a, continuité à gauche en b).

Les propriétés usuelles de la dérivation restent vraies pour les dérivées successives : additions, produits, quotients et composées de fonctions. Nous ne détaillons pas ces points faciles. Un seul résultat est intéressant à se noter, la *formule de Leibniz* pour la dérivée n-ième d'un produit de fonctions.

Proposition 1.3.1 *Si f et g sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et si elles sont toutes deux n fois dérivables en x_0, alors fg est n fois dérivable en x_0 et*

$$(fg)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,f^{(k)}(x_0)\,g^{(n-k)}(x_0)\,.$$

Démonstration Ca se démontre par récurrence assez facilement, exactement de la même façon qu'on démontre la formule du binôme de Newton. □

1.3.3 Fonctions convexes et dérivation

Les fonctions convexes sont une classe très utiles de fonctions, nous allons ici caractériser un peu leurs propriétés et en particulier leurs liens avec les dérivées successives.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on dit que f, défine sur I, est *convexe* sur I si pour tous $x,y\in I$, tout $\lambda\in[0,1]$ on a

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\,.$$

Intuitivement, cela signifie que le graphe de f est toujours "sous ses cordes".

On dit qu'une fonction est *concave* si $-f$ est convexe. Ce qui revient au même que prendre la définition ci-dessus en renversant l'inégalité.

Par exemple $x \mapsto f(x) = ax + b$ est convexe (car l'inégalité est au sens large dans la définition). La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe car

$$\begin{aligned}(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\ &\leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2\,.\end{aligned}$$

Encore un autre exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est convexe car

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| = \lambda\,|x| + (1-\lambda)\,|y|\ .$$

Proposition 1.3.2 *Une fonction f définie sur I est convexe si et seulement si*

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)\,,$$

pour tous $x_1, \ldots, x_k \in I$, tous $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Démonstration Un sens est évident puisque si cette identité est vraie pour tout k elle est vraie pour $k = 2$ c'est la définition de la convexité.

Supposons maintenant que f est convexe. Montrons le résultat par récurrence. Il est trivialement vrai pour $k = 1$ et $k = 2$. Supposons-le vrai pour k, alors si

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$$

cela veut dire que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 - \lambda_{k+1}$$

et donc que

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\lambda_{k+1}x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}\, x_i\right) \\ &\leq \lambda_{k+1} f\left(x_{k+1}\right) + (1-\lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}\, x_i\right)\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$$

donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}\, x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}\, f\left(x_i\right)\ ,$$

ce qui donne finalement

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f\left(x_i\right)\ .$$

□

Théorème 1.3.3 *Une fonction f convexe sur I si et seulement si pour tout $u \leq v \leq w \in I$ on a*

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u}\ .$$

Elle est aussi convexe si et seulement si pour tout $u \leq v \leq w \in I$ on a

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}\ .$$

Démonstration Supposons f convexe. Comme $v \in]u,w[$ il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $v = \lambda u + (1-\lambda)w$, en effet il faut prendre $\lambda = (w-v)/(w-u)$. Du coup on a

$$f(v) \leq \frac{w-v}{w-u} f(u) + \left(1 - \frac{w-v}{w-u}\right) f(w) = \frac{w-v}{w-u} f(u) + \frac{v-u}{w-u}\, f(w)\,.$$

En multipliant par $w-u$ on obtient

$$(w-u)f(v) \leq (w-v)f(u) + (v-u)f(w)$$

soit encore

$$(w-v)(f(v)-f(u)) \leq (v-u)(f(w)-f(v))\,.$$

Ca démontre la première inégalité.

Mais on a aussi

$$(u-v)f(w) \leq (w-v)f(u) - (w-u)f(v)$$

ce qui donne

$$(w-v)(f(w)-f(u)) \leq (w-u)(f(w)-f(v))\,,$$

qui est la deuxième inégalité.

Inversement supposons que f vérifie la première inégalité pour tous $u < v < w$. Soient $u < w \in I$ et $v = \lambda u + (1-\lambda)w$ pour un $\lambda \in]0,1[$. Alors $u < v < w$ et donc
$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(u)}{w-u}\,.$$
Ce qui donne
$$(w-u)(f(v)-f(u)) \leq (v-u)(f(w)-f(u))$$
ou encore
$$(w-u)(f(v)-f(u)) \leq (1-\lambda)(w-u)(f(w)-f(u))$$
ce qui donne
$$f(v)-f(u) \leq (1-\lambda)(f(w)-f(u))$$
et finalement
$$f(v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(w)\,.$$
D'où la convexité de f.

Supposons maintenant que f vérifie la deuxième inégalité :
$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}\,.$$
Ce qui donne
$$(w-v)(f(w)-f(u)) \leq (w-u)(f(w)-f(v))$$
ou encore
$$\lambda(w-u)(f(w)-f(u)) \leq (w-u)(f(w)-f(v))$$
ce qui donne
$$\lambda(f(w)-f(u)) \leq (f(w)-f(v))$$
et finalement
$$f(v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(w)\,.$$
D'où la convexité de f. □

Théorème 1.3.4 *Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I =]\alpha,\beta[$.*
1) Pour tout $x \in I$ la fonction $h \mapsto (f(x+h)-f(x))/h$ est croissante sur $]\alpha - x, 0[\cup]0, \beta - x[$.

2) Pour tout $x \in I$ les dérivées à droite et à gauche $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ existent.
3) Pour tous $x < y \in I$ on a

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)\,.$$

En particulier les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes.
4) La fonction f est continue.

Démonstration
1) Supposons $0 < h_1 < h_2$, posons $u = x$, $v = x + h_1$ et $w = x + h_2$ et appliquons la proposition précédente. On obtient

$$\frac{f(x + h_1) - f(x)}{h_1} \leq \frac{f(x + h_2) - f(x)}{h_2}$$

ce qui est le résultat annoncé. Les autres cas se traitent de la même façon.
2) La fonction $g(h) = (f(x+h)-f(x))/h$ est croissante sur $]\alpha-x, 0[\cup]0, \beta-x[$, donc elle est croissante sur $]\alpha - x, 0[$ et majorée par n'importe quel $g(u)$, $u \in]0, \beta - x[$. Elle admet donc une limite à gauche en 0. Ce qui signifie exactement que f est dérivable à gauche x. L'argument pour la dérivée à droite est le même.
3) Cela découle facilement de la décroissance de g encore.
4) Par le point 3) on a, pour tous $a < x < y < b \in I$

$$f'_d(a)(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq f'_g(b)(y - x)\,.$$

Ce qui prouve bien la continuité de f. $\square$

Attention ! Sur un intervalle fermé une fonction convexe n'est pas forcément continue aux extrémités de l'intervalle.

Théorème 1.3.5 *Soit f une fonction dérivable sur intervalle ouvert I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.*

Si f est deux fois dérivable sur I alors f est convexe si et seulement si f" est positive sur I.

Démonstration Si f est dérivable et convexe, alors on sait que $f' = f'_d$ et donc f' est croissante par le théorème précédent.

Inversement, si f est dérivable et f' croissante sur I. Nous allons montrer que f est convexe. Soient $x_1 < y < x_2 \in I$ avec $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Par l'égalité des accroissements finis on sait qu'il existe $\xi_1 \in]x_1, y[$ et $\xi_2 \in]y, x_2[$ tels que

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} = f'(\xi_1)\,, \qquad \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} = f'(\xi_2)\,.$$

En particulier $\xi_1 < \xi_2$ donc $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ et donc

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}\,.$$

Par le Théorème 1.3.3, on a montré la convexité de f.

L'argument avec la dérivée seconde est maintenant immédiat. □

Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. C'est une application directe du Théorème ci-dessus.

Proposition 1.3.6 *Soit f convexe sur un intervalle I ouvert. Soient $x < y \in I$. On a*

$$f(y) \geq f(x) + f'_g(x)(y - x)$$

et

$$f(y) \geq f(x) + f'_d(x)(y - x)\,.$$

1.4 Les formules de Taylor

La formule de Taylor et ses variantes, sont des formules qui disent que les bonnes fonctions (C^n, par exemple) peuvent être correctement approchées par des polynômes, en tout cas localement près d'un point, et qu'en plus on sait mesurer assez précisément l'erreur que l'on commet.

1.4.1 Rappels sur les comparaisons de fonctions

Soient f une fonction définie dans un voisinage de 0, soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que

$$f = o(x^m)$$

si $f(x) = \mathcal{E}(x)x^m$ où $\mathcal{E}(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

On dit que

$$f = O(x^m)$$

s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C\ |x^m|$ au voisinage de 0.

On dit que

$$f(x) \simeq x^m$$

(en 0) si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} = 1\,.$$

Rappelons un résultat du premier semestre.

Théorème 1.4.1 *Une fonction f définie au voisinage de x_0 est dérivable en x_0 si et seulement si*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)\,,$$

ou encore

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)\,.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &= e^{n\log(1-\frac{x}{n})}\\ &= e^{n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\ &= e^{-x+o(1)}\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\,.$$

1.4.2 La formule de Taylor-Young

Lemme 1.4.2 *Soit $k \in \mathbb{N}$ et g une fonction dérivable au voisinage de 0. Si $g'(h) = o(h^k)$ alors $g(h) - g(0) = o(h^{k+1})$.*

Démonstration Par hypothèse $g'(h) = \mathcal{E}(h)h^k$ au voisinage de 0, où $\mathcal{E}$ est une fonction qui tend vers 0 en 0. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour $|h| \le h_0$ on a $|g'(h)| \le \varepsilon\,|h|^k$. Notez qu'alors, pour tout $0 \le |h'| \le |h|$ on a du coup $|g'(h')| \le \varepsilon\,|h|^k$. Par l'inégalité des accroissements finis on a alors

$$|g(h) - g(0)| \le \varepsilon\,|h|^{k+1}\,.$$

En d'autre termes, la fonction $\widehat{\mathcal{E}}(h) = (g(h) - g(0))/h^{k+1}$ tend vers 0 et donc $g(h) - g(0) = o(h^{k+1})$. □

Théorème 1.4.3 (Formule de Taylor-Young) *Soit f une fonction définie et n fois dérivable au voisinage de x_0. Alors au voisinage de x_0 on*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)\,.$$

Démonstration Nous le montrons par récurrence sur n. On a vu qu'elle est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie au rang $n-1$, on l'applique à f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^{n-1}\right) \\ &= f'(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^{n-1}\right) . \end{aligned}$$

On applique le lemme ci-dessus à

$$g(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k .$$

On a

$$\begin{aligned} g'(h) &= f'(x_0+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} h^{k-1} \\ &= f'(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} h^k \\ &= o(h^{n-1}) . \end{aligned}$$

et comme $g(0) = 0$ on conclut que $g(h) = o(h^n)$ par le lemme précédent. □

1.4.3 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 admet un *développement limité à l'ordre n en x_0* si il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

au voisinage de x_0.

Attention ! On a vu que l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 est équivalent à la dérivabilité. Cette propriété ne s'étend pas aux ordres supérieurs à 1 : ce n'est pas parce qu'une fonction admet un développement limité à l'ordre n qu'elle est n fois dérivable. Voyons cela sur un exemple.

La fonction $f(x) = |x|^{5/2} \sin(1/x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et elle vérifie $|f(x)| \leq |x|^{5/2}$. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par une fonction f telle que $f(0) = 0$. Regardons la dérivabilité en 0. On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|^{5/2}}{x} \sin(1/x)$$

dont la limite est 0 quand x tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour les autres valeurs de x on a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}\,|x|^{3/2}\,\sin(1/x) - |x|^{1/2}\,\cos(1/x) & x > 0\,, \\ -\frac{5}{2}\,|x|^{3/2}\,\sin(1/x) - |x|^{1/2}\,\cos(1/x) & x < 0\,. \end{cases}$$

En particulier

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{5}{2}\,|x|^{1/2}\,\sin(1/x) - \frac{|x|^{1/2}}{x}\,\cos(1/x)\,.$$

A cause du second terme cette expression n'a pas de limite en 0. Notre fonction n'est pas deux fois dérivable en 0. Pourtant

$$|f(x)| \leq |x|^{5/2}$$

donc

$$f(x) = o(x^2)\,.$$

La fonction f admet bien un développement limité d'ordre 2 en 0.

Revenons sur les développements limités en général. Nous allons démontrer l'unicité du développement limité.

Lemme 1.4.4 *Soit P un polynôme de degré n. Si $P(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0 alors $P = 0$.*

Démonstration Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ le développement de P. Supposons qu'au moins un des a_k est non nul. Soit p le plus petit indice tel que $a_k \neq 0$. Alors en divisant par x^p on a

$$a_p = -\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + o(1)\,.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers 0, donc $a_p = 0$. Contradiction. Tous les a_k sont donc nuls. $\square$

Proposition 1.4.5 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. Si il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k\,(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Démonstration On fait la différence des deux développements et on applique le lemme précédent. □

Le résultat suivant montre que le développement limité de f à l'ordre n est la meilleure approximation de f au voisinage de 0 par un polynôme de degré n.

Proposition 1.4.6 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et possédant un développement limité à l'ordre n en x_0, de la forme $f(x) = P(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$. Alors, pour tout polynôme Q de degré n, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|f(x) - P(x-x_0)| \leq |f(x) - Q(x-x_0)|$$

pour tout x tel que $|x-x_0| \leq \delta$.

Démonstration Si $P = Q$ alors le résultat est évident. On suppose donc $P \neq Q$.

On sait que $|f(x) - P(x-x_0)| = o((x-x_0)^n)$. D'autre part, comme P et Q sont différents on a

$$P(x-x_0) - Q(x-x_0) = a_p(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)$$

pour un $a_p \in \mathbb{R}^*$ et un $p \leq n-1$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} f(x) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p &= \\ &= f(x) - P(x-x_0) + P(x-x_0) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p \\ &= o((x-x_0)^p)\,. \end{aligned}$$

Donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$|f(x) - Q(x-x_0)| \geq |a_p(x-x_0)^p| - |o((x-x_0)^p)| \geq \frac{|a_p|}{2}\,|x-x_0|^p$$

pour tout x tel que $|x-x_0| \leq \delta_1$. D'autre part

$$|f(x) - P(x-x_0)| = o((x-x_0)^n) = \mathcal{E}(x)\,|x-x_0|^{n-p}\,|x-x_0|^p$$

donc il existe aussi $\delta_2 > 0$ tel que

$$|f(x) - P(x-x_0)| \leq \frac{|a_p|}{2}\,|x-x_0|^p$$

pour tout x tel que $|x-x_0| \leq \delta_2$. En prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on a le résultat annoncé. □

1.4.4 Développement des fonctions usuelles

En application directe de la Formule de Taylor-Young on assez facilement les développements suivants, qu'il faut connaître par coeur.

Théorème 1.4.7 *Au voisinage de 0 on a*

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)},$$

autrement dit

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}.$$

On a

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)},$$

autrement dit

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)}.$$

On a

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)},$$

autrement dit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)}.$$

On a

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})},$$

autrement dit

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1})}.$$

On a

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2})},$$

autrement dit

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + o(x^{2n+2})}.$$

On a

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1})},$$

autrement dit

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} + o(x^{2n+1})}.$$

On a

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2})},$$

autrement dit

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + o(x^{2n+2})},$$

1.4.5 Taylor-Lagrange, reste intégral

Sous certaines conditions un peu plus fortes on peut dire plus de choses sur le reste dans la formule de Taylor-Young.

Théorème 1.4.8 (Formule de Taylor-Lagrange) *Si f est C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)\,.$$

Démonstration Soit

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\, f^{(k)}(x) - C\, \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

où C est une constante choisie telle que $g(a) = 0$ (ce qui possible car le facteur devant C est non nul en $x = a$.

On a aussi $g(b) = 0$ clairement. La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) =$. Mais on a aussi

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) + \\ &\quad + C \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + C \frac{(b-x)^n}{n!} . \end{aligned}$$

En particulier

$$0 = g'(c) = -\frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + C \frac{(b-c)^n}{n!}$$

ce qui donne

$$C = f^{(n+1)}(c) .$$

Du coup quand on écrit à nouveau $g(a) = 0$ on obtient la formule annoncée.
□

On a du coup une jolie estimation de l'erreur.

Théorème 1.4.9 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Si f est C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors si $f^{(n+1)}$ est bornée sur $]a, b[$ on a*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| .$$

Enfin on termine par une autre formule exacte pour le reste.

Théorème 1.4.10 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ alors*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt .$$

Démonstration La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la fonction f est C^1 sur $[a, b]$ et donc

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt\,.$$

Donc l'assertion est vraie.

Supposons-la vraie au rang $n - 1$. Nous avons donc

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\,dt\,.$$

On fait une intégration par parties dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Ce qui permet de terminer la récurrence. □

1.5 Propriétés des développements limités

1.5.1 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.5.1 *Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 qui admettent des développements limités à l'ordre n et p*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + o(h^n)\,, \qquad g(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p} b_k\, h^k + o(h^p)\,,$$

alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg admettent un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$

$$(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{q} (\lambda a_k + \mu b_k)\, h^k + o(h^q)\,,$$

$$(fg)(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{q} c_k\, h^k + o(h^q)$$

où

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\,.$$

Démonstration Supposons pour simplifier que $n \leq p$. On a donc

$$(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)\, h^k + \sum_{k=n+1}^{p} \mu b_k\, h^k + o(h^n) + o(h^p)\,.$$

Les trois derniers termes du membre de droite sont des $o(h^n)$. D'où le résultat pour la somme.

De même pour le produit :

$$f(x_0+h)\, g(x_0+h) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k\right) \left(\sum_{l=0}^{p} b_l\, h^l\right) + o(h^n)\, g(x_0+h) + o(h^p)\, f(x_0+h)\,.$$

Les fonctions f et g sont continues en x_0 donc bornées au voisinage de x_0, d'où

$$f(x_0 + h)\, g(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k b_l\, h^{k+l} + o(h^n)\,.$$

Dans les puissances h^{k+l} qui apparaissent dans la double somme ci-dessus on ne garde que les puissances $\leq n$ et on regroupe

$$f(x_0 + h)\, g(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\, h^k + o(h^n)\,.$$

□

Proposition 1.5.2 *Soit g une fonction définie au voisinage de x_0 et f une fonction définie au voisinage de $b = g(x_0)$. Si g admet un développement limité à l'ordre p en x_0 et si f admet un développement limité à l'ordre n en b alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$ obtenu en substituant les développements limités et en tronquant à l'ordre q.*

Démonstration Comme g est continue en x_0 on a $\lim_{h \to 0} g(x_0 + h) = g(x_0) = b$. Donc

$$\begin{aligned} f(g(x_0 + h)) &= f(b + (g(x_0 + h) - b)) \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k (g(x_0 + h) - b)^k + o((g(x_0 + h) - b)^q) \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k \left(\sum_{l=1}^{q} b_l\, h^l\right)^k + o((h + o(h))^q) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.5.3 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et admettant un développement limité à l'ordre n et p respectivement. Si $g(x_0) \neq 0$ alors f/g admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$.*

Démonstration La fonction $x \mapsto 1/x$ admet un développement limité de tout ordre en tout point $b_0 \neq 0$. Donc par le théorème de composition des développements limités la fonction $1/g$ admet un développement limité en 0, à l'ordre p. Ensuite on applique le résultat sur les produits de développements limités. □

Proposition 1.5.4 *Soit f une fonction dérivable définie au voisinage de x_0 et telle que f' admette un développement limité à l'ordre n*

$$f'(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, h^k + o(h^n)\,.$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} \, h^k + o(h^{n+1})\,.$$

Démonstration Soit

$$g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} \, h^k\,.$$

Par hypothèse

$$g'(h) = f'(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} a_k \, h^k = o(h^n)\,.$$

On applique alors le lemme 1.4.2. □

Proposition 1.5.5 *Soit f une fonction dérivable définie au voisinage de x_0 admettant un développement limité à l'ordre n*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, h^k + o(h^n)\,.$$

Si f' admet un développement limité à l'ordre $n - 1$ alors ce développement est de la forme

$$f'(x_0 + h) = \sum_{k=1}^{n} k \, a_k \, h^{k-1} + o(h^{n-1})\,.$$

Démonstration On applique la proposition précédente à f'. □

Attention ! Notez bien qu'ici on doit supposer l'existence d'un développement limité pour f' car celui-ci n'est pas garanti par l'existence du développement limité de f. Par exemple $f(x) = |x|^{5/2}\sin(1/x)$ est dérivable et admet un développement limité à l'ordre 2. Mais sa dérivée n'admet pas de développement limité à l'ordre 1.

1.5.2 Comportement local près des points critiques

On rappelle que pour une fonction réelle f dérivable, un *point critique* est un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$. Ces points peuvent être de 3 natures différentes : un minimum local, un maximum local, ni l'un ni l'autre (du type x^3 en 0).

Proposition 1.5.6 *Soit f définie au voisinage de x_0. Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 de la forme*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$$

avec $\alpha \neq 0$ et $p \geq 2$. Alors
– *si p est impair le point x_0 n'est ni un minimum, ni un maximum,*
– *si p est pair et $\alpha > 0$ alors x_0 est un minimum local strict,*
– *si p est pair et $\alpha < 0$ alors x_0 est un maximum local strict.*

Démonstration Si p est pair et $\alpha > 0$, alors on a

$$\frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p) \geq 0$$

dès que $|x - x_0|$ est assez petit pour que

$$|o((x - x_0)^p)| \leq \frac{\alpha}{4}(x - x_0)^p .$$

Donc on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p > f(x_0)$$

pour x suffisamment proche de x_0 et différent de x_0. Cela prouve que x_0 est un minimum local.

Le cas $\alpha < 0$ se traite exactement de la même façon.

Dans le cas p impair, supposons $\alpha > 0$ (l'autre cas se traite de manière analogue). De la même façon que ci-dessus on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p > f(x_0)$$

pour x suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$. Mais lorsque $x < x_0$ on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p < f(x_0)\,.$$

Ainsi on voit bien que x_0 n'est ni un minimum local, ni un maximum local.
$\square$

Proposition 1.5.7 *Soit f définie au voisinage de x_0. Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 de la forme*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$$

avec $\alpha \neq 0$ et $p \geq 2$. Alors

– *si p est impair le graphe de f traverse sa tangente en $(x_0, f(x_0))$ (x_0 est un point d'inflexion),*

– *si p est pair et $\alpha > 0$ le graphe de f reste localement au-dessus de sa tangente en $(x_0, f(x_0))$,*

– *si p est pair et $\alpha < 0$ le graphe de f reste localement en-dessous de sa tangente en $(x_0, f(x_0))$.*

Chapter 2

Intégration

L'intégrale est un des plus beaux et des plus puissants objet mathématique. Il s'agit sans aucun doute d'une des plus belles inventions de l'esprit humain. En effet, il s'agit tout d'abord d'un pure création de l'esprit au sens où c'est un objet limite, obtenu en passant à la limite sur des subdivisions etc., pas un objet qui existe dans la nature (ou du moins ça se discute !). Ensuite c'est un objet qui permet de calculer des choses très compliquées : pratiquement toutes les surfaces. Imaginez comment on s'y prenait il y a plusieurs siècles pour calculer des surfaces compliquées : on ne dispose en général que de peu d'outils ou de formules, on est obligé de passer par des approximations par des figures simples (comme les grecs avec le disque qu'ils encadraient par des polygones réguliers). L'intégrale fournit une réponse très puissante et extrêmement simple : il suffit de calculer une primitive et de prendre la différence de sa valeur en 2 points ! C'est vraiment surprenant de simplicité.

Il n'y a pas un seul pan des sciences, qu'elles soient physiques, chimiques, biologiques, économiques, informatiques etc. qui ne fasse pas aujourd'hui un usage intensif de l'intégrale. C'est clairement un objet-clef de l'analyse mathématique et des sciences en général.

Il existe des théories plus ou moins fines de l'intégration. Des théories qui permettent de calculer l'intégrale de fonctions plus ou moins compliquées, ou de fonctions qui vivent sur des espaces plus ou moins bizarres (mais nécessaires à un certain niveau). Cette année nous étudierons l'intégrale dite de Riemann, qui est déjà très puissante et générale. La forme la plus générale de l'intégrale est celle de Lebesgue, étudiée en L3 de Mathématiques.

2.1 Fonctions en escalier

2.1.1 Subdivisions

Une *subdivision* d'un intervalle $[a, b]$ est une famille finie $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de réels tels que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\,.$$

On appelle *diamètre de la subdivision* la quantité

$$\delta(\mathcal{S}) = \min\{x_{i+1} - x_i\,;\ i = 0, \ldots, n-1\}\,.$$

Une subdivision $\mathcal{S}$ de $[a, b]$ est dite *plus fine* qu'une subdivision $\mathcal{S}'$ de $[a, b]$ si $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. Cela veut dire que $\mathcal{S}'$ découpe $[a, b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidemment $\delta(\mathcal{S}) \geq \delta(\mathcal{S}')$.

Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$ on note $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ la subdivision obtenue en prenant l'union des deux ensembles $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$. La subdivision $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ est alors plus fine que $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}'$; c'est d'ailleurs la plus *grossière* subdivision qui est plus fine que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

2.1.2 Fonctions en escalier

On dit qu'une fonction f sur $[a, b]$ est *en escalier*, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Notez qu'on ne parle que des intervalles ouverts, rien n'est dit et imposé sur les points x_i, on peut très bien avoir de la continuité à droite ou à gauche en certain points, des points isolés, etc.

Si f est une fonction en escalier, on dit qu'une subdivision $\mathcal{S}$ est *adaptée* à f si f est constante sur chaque intervalle de $\mathcal{S}$. Notez que $\mathcal{S}$ peut très bien être *trop fine* pour f.

Proposition 2.1.1 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|f|$, $f + g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$.*

Démonstration Pour $|f|$ et λf c'est vraiment évident.

Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des subdivisions adaptées à f et g respectivement alors $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ est adaptée à f et à g. On peut donc supposer que f et g sont en escalier sur la même subdivision $\mathcal{S}'' = (x_i)$. Ainsi f et g sont constantes, égales respectivement à c_k et d_k sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Donc $f + g$ et fg sont égales à $c_k + d_k$ et $c_k d_k$ sur ces mêmes intervalles. Donc $f + g$ et fg sont aussi en escalier. $\square$

2.1.3 Intégrales de fonctions en escalier

Si f est une fonction en escalier sur $\mathcal{S} = (x_k)_{i=0}^n$, qui est égale à c_k sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, on note $I_{\mathcal{S}}(f)$ la surface algébrique de la famille de rectangles sous la courbe de f :

$$I_{\mathcal{S}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k)\,.$$

Proposition 2.1.2 *La quantité $I_{\mathcal{S}}(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision $\mathcal{S}$ adaptée à f, elle ne dépend que de f et de $[a, b]$.*

Démonstration Prenons deux subdivisions $\mathcal{S} = (x_k)_{k=0}^n$ et $\mathcal{S}' = (y_l)_{l=0}^m$ adaptées à f et commençons par le cas où $\mathcal{S}'$ est plus fine que $\mathcal{S}$. SUr chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ la fonction f est constante égale à c_k. Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_l, y_{l+1}[$ $l = l_0, \ldots, l_1$ où f prend des valeurs d_l qui sont forcément toutes égales à c_k. Donc

$$\sum_{l=l_0}^{l_1-1} d_l(y_{l+1} - y_l) = \sum_{l=l_0}^{l_1-1} c_k(y_{l+1} - y_l) = c_k(x_{k+1} - x_k)\,.$$

On voit bien que dans ce cas $I_{\mathcal{S}}(f) = I_{\mathcal{S}'}(f)$.

Maintenant si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont quelconques, adaptées à f alors $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ est plus fine que chacune et encore adaptée à f. Donc

$$I_{\mathcal{S}}(f) = I_{\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'}(f) = I_{\mathcal{S}'}(f)\,.$$

$\square$

Cette quantité qui ne dépend donc que de f et de $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

On l'appelle *intégrale de f entre a et b.*

Proposition 2.1.3 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1) $$\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

et

2) $$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Démonstration 1) Si $\mathcal{S}$ est une subdivision adaptée à f alors elle l'est à λf aussi. Si f prenait les valeurs c_k sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ alors λf prend les valeurs λc_k sur ces mêmes intervalles. On obtient donc facilement le résultat annoncé.

2) On prend une subdivision adaptée à f et à g. Chacune de ces fonctions vaut c_k et d_k respectivement sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ de cette subdivision. Ainsi $f + g$ vaut $c_k + d_k$ sur ces intervalles et on conclut facilement. □

Proposition 2.1.4 *Soient f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.*
1) Si f est positive sur tout $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

2) Si $f \geq g$ sur tout $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

3) On a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Démonstration
1) Toutes les valeurs c_k de f sur $]x_k, x_{k+1}[$ sont positives. Comme les $x_{k+1} - x_k$ sont tous positifs aussi on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \geq 0\,.$$

2) On applique 1) à la fonction $f - g$ qui est positive. Donc

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0$$

mais on a vu précédemment que

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

d'où le résultat.

3) Pour tout $x \in [a,b]$ on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Donc on a

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

□

2.2 Fonctions Riemann-intégrables

Nous allons quitter les fonctions en escalier pour essayer de calculer l'intégrale de fonctions plus compliquées. En fait, nous allons utiliser l'idée intuitive de l'intégrale, la même que les grecs, c'est à dire que l'on peut calculer l'intégrale des fonctions qui se laissent bien approcher par des fonctions en escalier.

Au début on va travailler un peu à l'aveugle, c'est à dire qu'on va regarder les propriétés de l'intégrale sans savoir vraiment sur quelles fonctions ça s'applique. Il faudra être un peu patient, on donnera ensuite des classes de fonctions qui marchent et auxquelles toutes les propriétés déjà obtenues s'appliquent.

2.2.1 Construction de l'intégrale de Riemann

Soit f une fonction définie et *bornée* sur $[a,b]$. On note $\mathcal{E}_-(f)$ l'ensemble de toutes les fonctions en escalier ϕ sur $[a,b]$ qui vérifient $\phi \leq f$ sur $[a,b]$. On note $\mathcal{E}_+(f)$ l'ensemble de toutes les fonctions en escalier ψ sur $[a,b]$ qui vérifient $f \leq \psi$ sur $[a,b]$. On note

$$\mathcal{I}_-(f) = \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\,;\ \phi \in \mathcal{E}_-(f)\right\}$$

et

$$\mathcal{I}_+(f) = \left\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \in \mathcal{E}_+(f)\right\}\,.$$

Comme f est bornée, par exemple $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$, alors $\mathcal{E}_-(f)$ est non vide car il contient la fonction constante égale à m et $\mathcal{E}_+(f)$ est non vide car il contient la fonction constante égale à M. Donc $\mathcal{I}_-(f)$ et $\mathcal{I}_+(f)$ sont non vides. Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $\mathcal{I}_-(f)$ et $(b-a)m$ est un minorant de $\mathcal{I}_+(f)$. Donc

$$i_a^b(f) = \sup \mathcal{I}_-(f)$$

et

$$I_a^b(f) = \inf \mathcal{I}_+(f)$$

existent.

De toute évidence on a toujours

$$i_a^b(f) \leq I_a^b(f) .$$

Mais rien ne dit pour une fonction quelconque que ces deux quantités vont être égales. On va d'ailleurs voir un contre-exemple.

Soit f la fonction sur l'intervalle $[0,1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} , \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Si ψ est une fonction en escalier qui majore f sur $[0,1]$, alors sur tout intervalle où ψ est constante il y a un rationnel, donc ψ doit être supérieure ou égale à 1 sur cet intervalle. Donc $\psi \geq 1$ sur $[0,1]$, en particulier $I_0^1(f) \geq 1$.

Avec le même raisonnement, on voit bien que l'on a aussi $i_a^b(f) \leq 0$. Donc on n'a sûrement pas égalité entre $i_a^b(f)$ et $I_a^b(f)$.

L'idée de base pour la construction de l'intégrale c'est de définir les fonctions intégrables comme étant celles pour lesquelles les deux quantités coïncident. Dans ce cas cette valeur commune serait par définition l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Faisons ensemble en détail le cas d'une fonction pour laquelle ça marche. Prenons la fonction $f(x) = \alpha x$ sur $[0,1]$, avec $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la subdivision $x_k = k/n$, $k = 0, \ldots, n$. Si, sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ on définit la fonction $\psi(x) = \alpha(k+1)/n$ et la fonction $\phi(x) = \alpha k/n$, $k = 0, \ldots, n-1$, on a défini 2 fonctions en escalier telles que $\phi \leq f \leq \psi$. Calculons les intégrales des ces deux fonctions :

$$\int_0^1 \phi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \, \frac{k}{n} \, \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n^2} \, \frac{n(n-1)}{2} = \frac{\alpha(n-1)}{2n} ,$$

$$\int_0^1 \psi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \, \frac{k+1}{n} \, \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n^2} \, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\alpha(n+1)}{2n} .$$

Donc on a en particulier

$$\frac{\alpha(n-1)}{2n} \leq i_0^1(f) \leq I_0^1(f) \leq \frac{\alpha(n+1)}{2n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on voit bien que

$$i_0^1(f) = I_0^1(f) = \frac{\alpha}{2}$$

qui est bien la surface sous le graphe de f, entre 0 et 1.

On dit qu'une fonction bornée f sur $[a, b]$ est *intégrable* (*au sens de Riemann*) si $i_a^b(f) = I_a^b(f)$. Cette valeur commune est notée

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

et appelée *intégrale de f entre a et b*.

Théorème 2.2.1 *Une fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe des suites (ϕ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ pour tout n et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x) - \psi_n(x)\, dx = 0\,.$$

Dans ce cas on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx$ et cette limite commune est $\int_a^b f(x)\, dx$.

Démonstration Si f est intégrable alors $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(x)\, dx$. Par la caractérisation du sup, il existe une suite (ϕ_n) dans $\mathcal{E}_-(f)$ et une suite (ψ_n) dans $\mathcal{E}_+(f)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx = i_a^b(f) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx = I_a^b(f)\,.$$

D'où le résultat dans un sens.

Inversement, si il existe deux suites (ϕ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ pour tout n et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x) - \psi_n(x)\, dx = 0\,,$$

alors comme on a

$$\int_a^b \phi_n(x) \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(x)\, dx\,,$$

on en déduit que

$$0 \leq I_a^b(f) - i_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(x) - \phi_n(x)\, dx\,.$$

Ce qui prouve que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$. De plus on a aussi

$$0 \leq i_a^b(f) - \int_a^b \phi_n(x)\, dx \leq \int_a^b \psi_n(x) - \phi_n(x)\, dx$$

et

$$\int_a^b \psi_n(x)\, dx - I_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(x) - \phi_n(x)\, dx\,.$$

On conclut facilement maintenant. □

2.2.2 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 2.2.2 *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf et $f + g$ sont intégrables sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Démonstration Comme f et g sont intégrables on sait qu'il existe des suites (ϕ_n), (ψ_n), (θ_n) et $\eta_n)$ de fonctions en escalier telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \qquad \theta_n \leq g \leq \eta_n$$

pour tout n et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \eta_n(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Si $\lambda > 0$, alors

$$\lambda\phi_n \leq \lambda f \leq \lambda\psi_n$$

pour tout n et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\phi_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\psi_n(x)\, dx = \int_a^b \lambda f(x)\, dx\,.$$

Donc λf est intégrable sur $[a, b]$.

Mais comme on a déjà vu que $\int_A^b \lambda\phi_n(x)\,dx = \lambda \int_a^b \phi_n(x)\,dx$ et la même chose pour ψ_n on a $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

Pour $\lambda > 0$ on inverse les inégalités, mais les arguments sont les mêmes. Pour $\lambda = 0$ c'est trivial.

On a aussi

$$\phi_n + \theta_n \leq f + g \leq \psi_n + \eta_n$$

pour tout n et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x) + \theta_n(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx + \int_a^b \theta_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x) + \eta_n(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx + \int_a^b \eta_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \eta_n(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

On conclut facilement maintenant. □

2.2.3 Intégrales et inégalités

Les propriétés et en particulier les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté.

Proposition 2.2.3 *Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$.*

1) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

2) Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Démonstration
1) Comme f est intégrable, on sait qu'il existe une suite (ψ_n) de fonction en escalier telles que $f_n \leq \psi_n$ pour tout n et $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+/infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx$. Comme f est positive, toutes les fonctions ψ_n le sont aussi, donc les intégrales des ψ_n sont positives et leur limite aussi.
2) On raisonne avec la fonction $f-g$ qui est positive sur $[a,b]$ et on applique 1). $\square$

Pour toute fonction f bornée sur $[a,b]$, pour tout $x \in [a,b]$ on pose $f_+(x) = \max f(x), 0$ et $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Ces deux fonctions sont positives. On remarque que

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \qquad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)\,.$$

Théorème 2.2.4 *Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a,b]$, alors f_+, f_- et $|f|$ sont aussi intégrables. On a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\;dx\,.$$

Démonstration Si f est intégrable alors on a comme d'habitude des fonctions en escalier $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ dont les intégrales convergent vers celle de f. On vérifie alors facilement que $(\phi_n)_+ \leq f_+ \leq (\psi_n)_+$ et que $(\psi_n)_+ - (\phi_n)_+ \leq \psi_n - \phi_n$. Donc f_+ est intégrable sur $[a,b]$.

Avec un raisonnement analogue on a l'intégrabilité de f_-.

Comme $|f|$ est la somme de deux fonctions intégrables elle est elle-même intégrable. Comme de plus on a toujours $-|f| \leq f \leq |f|$ on en déduit l'inégalité des intégrales. $\square$

Proposition 2.2.5 (Formule de la moyenne) *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$ avec $a<b$. Soient m et M la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a,b]$. Alors la quantité*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

appartient à l'intervalle $[m,M]$.

Démonstration Comme on a $m \leq f \leq M$ on en déduit

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\,.$$

D'où le résultat. $\square$

Cette quantité μ obtenue ci-dessus est la *valeur moyenne* de f sur $[a,b]$.

2.2.4 Intégrales et produits

Nous allons maintenant montrer que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable. C'est déjà un travail un peu plus subtil que ce qu'on a fait précédemment. Par contre il ne faut surtout pas s'attendre à ce que l'intégrale du produit soit égale au produit des intégrales. Prenez par exemple une fonction ϕ constante égale à γ sur $[0, 2]$ on a

$$\int_0^2 \phi(x)^2\,dx = 2\gamma^2 \qquad \left(\int_0^2 \phi(x)\,dx\right)^2 = 4\gamma^2\,.$$

Proposition 2.2.6 *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ alors fg est bornée et intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration On commence la démonstration par le cas où f et g sont toutes les deux positives. On note M et N un majorant de f et de g respectivement. Soient (ϕ_n), (ψ_n), (θ_n), (η_n) des suites de fonctions en escalier telles que $\phi_n \le f \le \psi_n$ et $\theta_n \le g \le \eta_n$ et avec les propriétés de convergence usuelles.

On pose

$$\phi'_n = (\phi_n)_+,\ \ \psi'_n(x) = \min\{M, \psi_n(x)\},\ \ \theta'_n = (\theta_n)_+,\ \ \eta'_n(x) = \min\{N, \eta_n(x)\}\,.$$

Ce sont toutes des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et on a

$$0 \le \phi'_n \le f \le \psi'_n \le M, \qquad 0 \le \theta'_n \le g \le \eta'_n \le N\,.$$

En particulier on a $\phi'_n\theta'_n \le fg \le \psi'_n\eta'_n$ et les fonctions qui encadrent fg sont en escalier. On va maintenant regarder la convergence de $\int_a^b \psi'_n(x)\eta'_n(x) - \phi'_n(x)\theta'_n(x)\,dx$. On a, en utilisant $\psi'_n \le \psi_n$, $\phi'_n \ge \phi_n$, etc.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \psi'_n(x)\eta'_n(x) - \phi'_n(x)\theta'_n(x)\,dx \le \\
&\quad \le \int_a^b (\psi'_n(x) - \phi'_n(x))\eta'_n(x) + \phi'_n(x)(\eta'_n(x) - \theta'_n(x))\,dx \\
&\quad \le N\int_a^b \psi'_n(x) - \phi'_n(x)\,dx + M\int_a^b \eta'_n(x) - \theta'_n(x)\,dx \\
&\quad \le N\int_a^b \psi_n(x) - \phi_n(x)\,dx + M\int_a^b \eta_n(x) - \theta_n(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend bien vers 0. On a prouvé l'intégrabilité de fg.

Si f et g sont maintenant quelconques (bornées et intégrables sur $[a,b]$), si m et n sont des minorants de f et g respectivement alors $f-m$ et $g-n$ sont positives, bornées et intégrables sur $[a,b]$. Donc, on a vu que $(f-m)(g-n)$ est intégrable sur $[a,b]$. mais comme

$$fg = (f-m)(g-n) + mg + nf - mn$$

on a que fg est intégrable, comme somme de fonctions intégrables. □

Une inégalité très importante pour les intégrales de produits.

Théorème 2.2.7 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\,dx \int_a^b g(x)^2\,dx\,.$$

Démonstration

Soit λ un réel quelconque. La fonction $f+\lambda g$ est intégrable, donc $(f+\lambda g)^2$ aussi. Cette dernière est une fonction positive, donc son intégrale est positive aussi. On a donc

$$\int_a^b f(x)^2\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \lambda^2 \int_a^b g(x)^2\,dx \geq 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est un polynôme de degré 2 en λ. S'il est toujours positif c'est que son discriminant est négatif ou nul :

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b g(x)^2\,dx \int_a^b f(x)^2\,dx \leq 0\,.$$

Ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz. □

2.3 Familles de fonctions intégrables

2.3.1 Manipulation de fonctions intégrables

Théorème 2.3.1 *Si f est une fonction bornée et intégrable et si g est une fonction définie sur $[a,b]$ est égale à f sauf sur un nombre finis de points, alors g est intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration Par hypothèse il existe une subdivision $\mathcal{S} = (x_k)$ de $[a,b]$ telle que $f = g$ sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$. La fonction $f-g$ est donc nulle sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$. En particulier la fonction $f-g$ est en escalier ! Elle est donc intégrable et son intégrale est clairement nulle. La fonction $g = f-(f-g)$ est donc intégrable et son intégrale est égale à celle de f. □

2.3.2 Monotonie

Maintenant qu'on a établi les propriétés principales des fonctions intégrables et des intégrales, on va revenir à la définition des fonctions intégrables et exhiber des ensembles explicites de fonctions intégrables.

On dit qu'une fonction f sur $[a,b]$ a une certaine propriété (comme être continue, monotone, dérivable, etc.) *par morceaux* si il existe une subdivision $\mathcal{S} = (x_k)_{k=0}^n$ de $[a,b]$ telle que f a cette propriété sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ et si elle admet un prolongement ayant cette même propriété sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Les fonctions étagées sont les fonctions constantes par morceaux.

Théorème 2.3.2 *Toute fonction monotone par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable.*

Démonstration Une fonction monotone par morceaux est monotone sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ et admet un prolongement monotone sur $[x_k, x_{k+1}]$. En particulier elles sont bornées sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ et donc bornées sur $[a,b]$.

Fixons-nous maintenant sur un des intervalles de monotonie, appelons-le $[a,b]$ aussi et supposons f croissante. Cela ne change rien dans la suite.

On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n morceaux identiques de taille $(b-a)/n$, à savoir $x_k = a + k(b-a)/n$, $n = 0, \ldots, n-1$. On construit les fonctions étagées

$$\phi(t) = f(x_k), \quad \psi(t) = f(x_{k+1})$$

sur $]x_k, x_{k+1}[$. On a donc $\phi \le f \le \psi$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi(t) - \phi(t))\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left(f(b) - f(a)\right).\end{aligned}$$

On a prouvé l'integrabilité de f. □

2.3.3 Continuité

Rappelez-vous qu'une fonction f est continue sur un ensemble E si

$$\forall x \in E\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ \forall y \in E\,,\ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

Dans cette définition, il faut noter que le $\delta > 0$ ci-dessus dépend de ε bien sûr mais aussi de x. Prenons un exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour x

fixé, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la condition $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ revient à $|x^2 - y^2| \leq \varepsilon$ ou encore, en écrivant $y = x + (y - x)$, on obtient $|2x(y - x) + (y - x)^2| \leq \varepsilon$. Prenons pour simplifier le cas $y - x > 0$ et $x > 0$. Si $y - x \leq \delta$ alors $|2x(y - x) + (y - x)^2| \leq (2x + \delta)\delta$. Si on veut que ce soit inférieur à ε il faut $\delta \leq \varepsilon/(2x + \delta) \leq \varepsilon/2x$. On voit bien que lorsque que x est grand il faut une condition bien plus forte sur $|x - y|$ pour que cette inégalité soit réalisée. Le δ dépend de x.

Une fonction f est dite *uniformément continue* sur un ensemble E si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\,;\ \forall x, y \in E,\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Là, le δ est le même pour tout x dans E. On a vu ci-dessus que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions linéaires, les fonctions lipschitziennes

$$\exists K > 0\,;\ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|\ ,\ \forall x, y$$

sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.3 (Théorème de Heine) *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$ avec $|x - y| \leq \delta$ et tels que $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Ainsi, il existe deux suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Les suites (x_n) et (y_n) sont bornées, elles admettent donc une sous-suite convergente, vers des limites $x, y \in [a, b]$. Comme on a $|x_n - y_n| \leq 1/n$, on a forcement $x = y$. Comme f est continue alors $\lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = 0$ et ça contredit le fait que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout n. □

Théorème 2.3.4 *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable.*

Démonstration Sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ la fonction est bornée car prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$. On peut supposer, sans perte de généralité que f est continue sur $[a, b]$. On a vu qu'alors f est uniformément continue sur $[a, b]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Découpons $[a, b]$ en intervalles réguliers de diamètre inférieur à δ. On définit deux fonctions étagées ϕ et ψ sur cette subdivision par

$$\phi(t) = f(x_k) - \varepsilon\,,\quad \psi(t) = f(x_k) + \varepsilon$$

sur $]x_k, x_{k+1}[$. On a $\phi \leq f \leq \psi$ grace à la continuité uniforme de f. De plus

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(t) - \phi(t)\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(f(x_k) + \varepsilon - f(x_k) + \varepsilon) \\ &= 2\varepsilon(b-a)\,.\end{aligned}$$

On peut donc choisir ϕ et ψ de telle sorte que cette différence d'intégrale soit aussi petite que voulue. Cela montre l'intégrabilité de f. □

2.3.4 Convention et relation de Chasles

Proposition 2.3.5 *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$.*
1) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.
2) Si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.
3) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Démonstration
1) Soint ψ et ψ sont deux fonctions en escaliers sur $[a,b]$ telles que $\phi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b \psi(x) - \phi(x)\, dx \leq \varepsilon$. On note ϕ_1 et ψ_1 les restrictions de ϕ et ψ sur $[a,c]$. Elles sont encore en escalier et vérifient $\phi_1 \leq f \leq \psi_1$ sur $[a,c]$. Comme on voit facilement que $\int_a^c \psi_1(x) - \phi_1(x)\, dx \leq \int_a^b \psi(x) - \phi(x)\, dx \leq \varepsilon$, on a l'integrabilité de f sur $[a,c]$.
2) Facile (laissé en exercice).
3) La relation de Chasles est claire pour les fonctions en escalier. Maintenant si ϕ_1, ψ_1 sont comme d'habitude pour f sur $[a,c]$ et ϕ_2, ψ_2 pour f sur $[c,b]$, alors $\phi_1 + \phi_2$ et $\psi_1 + \psi_2$ sont associées à f sur $[a,b]$. □

On adopte une convention très pratique pour la suite : si $a \leq b$ alors

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

En particulier, la relation

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

devient vraie quelques que soient les relations d'ordre entre a, b et c (si au moins deux des trois intégrales sont bien définies, l'autre l'est forcement).

2.4 Primitives et intégrales

Jusque là l'intégrale peut paraître comme un objet assez abstrait et avec lequel il est pas plus facile de faire des calculs que de faire des approximations de surface par des rectangles. Le miracle va se faire quand on va établir le lien avec la primitive.

2.4.1 Le théorème fondamental

Pour le moment on va se concentrer sur l'étude des propriétés de la fonction

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,.$$

On va voir que F améliore toujours la régularité de f. Mais il faut faire un peu attention aux détails !

Proposition 2.4.1 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$, avec $|f| \leq M$. Soit $c \in [a, b]$. Alors, si on pose $F(x) = \int_c^x f(x)\,dx$ on a*

$$|F(x) - F(y)| \leq M\,|x - y|$$

pour tout $x, y \in [a, b]$.

Démonstration Supposons que $x \leq y$ (l'autre cas se traite de la même façon). On a

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt\,.$$

En particulier

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt = M(y - x)\,.$$

□

Corollaire 2.4.2 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$. Soit $c \in [a, b]$. On pose $F(x) = \int_c^x f(x)\,dx$, pour tout $x \in [a, b]$. Alors F est continue sur $[a, b]$.*

Démonstration On a vu ci-dessus que F est lipschitzienne. La conclusion est facile maintenant (exercice). □

Proposition 2.4.3 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$. Soit $c \in [a, b]$. On pose $F(x) = \int_c^x f(x)\, dx$, pour tout $x \in [a, b]$. Si f admet une limite à droite en $x_0 \in [a, b]$ alors F est dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$. De même, si f admet une limite à gauche en $x_0 \in [a, b]$ alors F est dérivable à gauche en x_0 et $F'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$.*

Démonstration Supposons que f admet une limite à droite en $x_0 \in [a, b]$, notée l. Alors pour $h > 0$ on a

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt\,.$$

Si h est suffisamment petit alors $|f(t) - l| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [x_0, x_0 + h]$. On a donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - l \right| &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt - hl \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - l\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - l|\; dt \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt \\
&= \frac{\varepsilon h}{h} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ca montre que F est dérivable à droite, de dérivée à droite l. L'autre cas se fait de la même manière. □

Le théorème qui suit découle maintenant immédiatement.

Théorème 2.4.4 *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, si $c \in [a, b]$, alors la fonction $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$ est dérivable sur $[a, b]$, de dérivée f.*

Faites attention, si f n'est pas continue, la fonction F n'est plus dérivable. Prenons un exemple. Soit f la fonction sur $[0, 2]$ qui vaut 1 sur $[0, 1]$ et 2 sur $]1, 2]$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $F(x) = x$. En particulier $F(1) = 1$. Ensuite, pour $x \in]1, 2]$ on a $F(x) = 1 + 2x$.

La fonction F est continue en 1, comme on le savait déjà, mais elle n'est pas dérivable (dérivée 1 à gauche, 2 à droite).

On dit qu'une fonction f définie sur $[a, b]$ admet une *primitive* F sur $[a, b]$ si F est dérivable sur $[a, b]$ et si $F' = f$ sur $[a, b]$.

Proposition 2.4.5 *Si F et G sont deux primitives de f sur $[a,b]$ alors $F-G$ est constante sur $[a,b]$.*

Démonstration On a déjà vu cet argument : $F-G$ est dérivable, de dérivée nulle sur $[a,b]$, donc constante sur $[a,b]$. □

Proposition 2.4.6 *Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet une primitive sur $[a,b]$.*

Démonstration On l'a vu. Si f est continue alors $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ est dérivable, de dérivée f. □

Attention, il existe des fonctions non continues qui ont des primitives. Par exemple $F(x)=x^2\sin(1/x)$ pour $x\neq 0$ et $F(0)=0$ est dérivable. Sa dérivée est $f(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=1$. Sa dérivée n'est pas continue en 0.

Théorème 2.4.7 (Théorème fondamental de l'analyse) *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,.$$

Démonstration Posons $G(x)=\int_a^x f(x)\,dx$, pour tout $x\in[a,b]$. On a vu que G est dérivable et que $G'=f$, donc G est une primitive de f. On a de plus $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$. Maintenant si F est une primitive quelconque de f alors, comme F et G diffèrent seulement par une constante additive, on a $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\,dx$. □

Une fonction f est dite C^1 sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $[a,b]$ et si sa dérivée est continue sur $[a,b]$.

Théorème 2.4.8 *Si f est une fonction C^1 sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)\,.$$

Démonstration Si f est C^1 alors sa dérivée f' est continue et f est une primitive de f'. On applique alors le théorème ci-dessus. □

2.4.2 Intégration par parties

Théorème 2.4.9 *Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\,.$$

Démonstration La preuve est simple. On a $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Comme uv est C^1 on applique le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,dx = (uv)(b) - (uv)(a).$$

Les fonctions $u'v$ et uv' sont intégrables sur $[a, b]$ donc

$$\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\,.$$

D'où le résultat. $\square$

2.4.3 Changement de variables

Théorème 2.4.10 (Changement de variable) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit φ une fonction C^1 sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\,.$$

Démonstration La fonction f est continue donc elle admet une primitive F qui est C^1. La fonction $F \circ \varphi$ est donc C^1 et $(F \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x)\, f \circ \varphi(x)$. Par le théorème fondamental on a

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\, f \circ \varphi(x)\,dx = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)\,.$$

Mais cette dernière quantité est aussi égale à

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\,.$$

$\square$

Théorème 2.4.11 (Changement de variable, variante 1)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit ϕ une fonction C^1 sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\phi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$ et telle que φ soit strictement monotone sur $]\alpha,\beta[$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(phi(x))\,\varphi'(x)\,dx\,.$$

Démonstration Comme φ est strictement monotone sur $[\alpha,\beta]$, c'est une bijection. Si on pose $\alpha' = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta' = \varphi^{-1}(\beta)$, ce n'est plus qu'une application du théorème ci-dessus. □

Théorème 2.4.12 (Changement de variable, variante 2)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit ϕ une fonction C^1 sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\phi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$ et telle que φ' ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\,dx\,.$$

Démonstration Comme la dérivée de φ ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$ alors φ est strictement monotone sur $[\alpha,\beta]$, en particulier c'est une bijection. On écrit

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt &= \int_\alpha^\beta \frac{f(\varphi(t))}{\varphi'(t)}\,\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta \frac{f(\varphi(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(t)))}\,\varphi'(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

La fonction $g(t) = f(t)/\varphi'(\varphi^{-1}(t))$ est continue sur $[a,b]$, on applique le théorème du changement de variable, on obtient

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\,dx\,.$$

□

Grâce à deux exemple on va voir comment concrètement on utilise ces formules. On commence par

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

On veut faire le changement de variable $x = \cos(u)$. L'application $u \mapsto \cos(u)$ est C^1 et c'est une bijection de $[0,\pi/2]$ dans $[0,1]$. On applique la variante

1,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arccos(0)}^{\arccos(1)} \sqrt{1-\cos(u)^2}\,(-\sin(u))\,du \\
&= \int_{\pi/2}^{0} -\sin(u)^2\,du \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,(1-\cos(2u))\ du \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin(2u)\right)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Le moyen pour se souvenir de cette variante ainsi que de l'autre est la suivante : on a choisi le changement de variable $x = \cos(u)$, on doit remplacer tout ce qui est en x par des u. Ca veut dire 3 choses :

– les bornes : si x vaut 0 alors u vaut $\arccos(0)$, si x vaut 1 alors u vaut $\arccos(1)$;

– la variable x quand elle apparaît dans f : $\sqrt{1-\cos(u)^2}$;

– le dx doit être remplacé par du du : on a $x = \cos(u)$, on écrit

$$\frac{dx}{du} = -\sin(u)$$

ou encore

$$dx = -\sin(u)\,du$$

et on remplace.

Faisons un exemple avec la variante 2. On veut calculer, pour $x > 0$

$$\int_0^x \sin(\sqrt{t})\,dt\,.$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est C^1 sur $[0, x]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert. On applique la variante 2 :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin(\sqrt{t})\,dt &= \int_0^{\sqrt{x}} \sin(y)\,2y\,dy \\
&= [-2y\ \cos(y)]_0^{\sqrt{x}} + \int_0^{\sqrt{x}} 2\cos(y)\,dy \\
&= -2\sqrt{x}\ \cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x})\,.
\end{aligned}$$

Comme précédemment détaillons le changement de variable avec la méthode mnémotechnique. On veut poser $y = \sqrt{t}$:
– les bornes : quand t vaut 0 alors y vaut 0, quand t vaut x alors y vaut $\sqrt{x}$;
– la variable : on remplace $\sqrt{t}$ par y ;
– la différentielle : on a $y = \sqrt{t}$ donc

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2y}\, dt\,,$$

ce qui donne

$$dt = 2y\, dy\,.$$

2.5 Quelques résultats

Dans cette section nous allons voir plusieurs petits résultats assez utiles liés à la théorie de l'intégration.

Théorème 2.5.1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et de signe constant sur $[a, b]$. Si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.*

Démonstration Supposons par exemple que f est positive sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Cette quantité est positive pour tout x car f est positive, elle est aussi $\leq \int_a^b f(t)\, dt$, puisqu'il faut rajouter $\int_x^b f(t)\, dt$ qui est positif. Donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Mais, comme f est continue, par le théorème fondamental de l'analyse on sait que F est dérivable, de dérivée $F'(x) = f(x)$. Donc $f(x) = F'(x) = 0$ pour tout x. $\square$

Ce théorème permet d'améliorer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des fonctions continues.

Théorème 2.5.2 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\, dx\right)\,.$$

De plus, on a égalité ci-dessus si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration On a déjà vu la démonstration de l'inégalité. Souvenez-vous, on avait

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\, dx =$$

$$= \int_a^b f(x)^2\, dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\, dx + \lambda^2 \int_a^b g(x)^2\, dx \geq 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est un polynôme de degré 2 en λ. Son discriminant est négatif ou nul :

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b g(x)^2\,dx \int_a^b f(x)^2\,dx \leq 0\,.$$

Si on l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors le discriminant est nul. Cela veut dire qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b (f(x) + \lambda_0 g(x))^2\,dx = 0$. Mais la fonction $(f + \lambda_0 g)^2$ est continue et positive, donc par le théorème précédent elle est nulle sur $[a, b]$. $\square$

Théorème 2.5.3 (Formule de la moyenne) *Soit f continue sur $[a, b]$ et g intégrable sur $[a, b]$ avec g de signe constant. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

En particulier si $g = 1$ on a

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Démonstration Nous supposerons ici que g est positive. L'autre cas se traite de manière analogue.

La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$m = \inf\{f(x)\,;\ x \in [a, b]\}\,, \quad M = \sup\{f(x)\,;\ x \in [a, b]\}\,.$$

On a

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, alors la double inégalité ci-dessus montre que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ et donc que l'énoncé du théorème est trivialement vérifié.

Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$ alors on a

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M\,.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires on sait que comme f est continue elle passe par toutes les valeurs de $[m, M]$. Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\,.$$

$\square$

2.6 Sommes de Riemann, de Darboux, surfaces etc.

Dans cette section on va concrétiser le fait qu'une fonction intégrable est une fonction dont on peut approcher l'intégrale par des intégrales de fonctions en escalier, donc par des sommes particulières.

2.6.1 Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $\mathcal{S} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. On note

$$m_k = \inf\{f(x)\,;\ x \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad \text{et} \quad M_k = \sup\{f(x)\,;\ x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

pour tout $k = 0, \ldots, n-1$. On définit les *sommes de Darboux*

$$s(\mathcal{S}, f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \quad \text{et} \quad S(\mathcal{S}, f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)\,.$$

On note

$$s_a^b(f) = \sup\{s(\mathcal{S}, f)\,;\ \mathcal{S} \text{ subdivision de } [a,b]\}$$
$$S_a^b(f) = \inf\{s(\mathcal{S}, f)\,;\ \mathcal{S} \text{ subdivision de } [a,b]\}\,.$$

Théorème 2.6.1 *Soit f bornée sur $[a,b]$ alors f est intégrable si et seulement si $s_a^b(f) = S_a^b(f)$. Cette valeur commune est alors l'intégrale de f sur $[a,b]$.*

Démonstration On a toujours

$$s_a^b(f) \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq S_a^b(f)\,,$$

de manière évidente. Donc si $s_a^b(f) = S_a^b(f)$ on a bien que f est intégrable et que son intégrale est cette valeur commune.

Réciproquement, si f est intégrable, alors $i_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. On sait aussi qu'il existe φ fonction en escalier, telle que $\varphi \leq f$ et

$$i_a^b(f) - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq i_a^b(f)\,.$$

Pour une fonction en escalier φ, montrons que

$$s_a^b(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\,dx\,.$$

Soit M tel que $|\varphi| \leq M$. Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ d'une subdivision adaptée à φ on découpe l'intervalle en $[x_k, x_k + \delta] \cup [x_k + \delta, x_{k+1} - \delta] \cup [x_{k+1} - \delta, x_{k+1}]$. Sur cet intervalle et pour cette nouvelle subdivision, l'erreur commise entre $s(\mathcal{S}, \varphi)$ et $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)\, dx$ est inférieure à $4M\delta$. Donc on peut rendre cette différence aussi petite que voulue. D'où le résultat annoncé.

Enfin, notons que si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $s_a^b(f) \geq s_a^b(g)$ trivialement.

On en déduit que $i_a^b(f) - \varepsilon \leq s_a^b(\varphi) \leq s_a^b(f)$. Ca prouve que $i_a^b(f) \leq s_a^b(f)$ et que donc ils sont égaux. On fait de même avec $I_a^b(f)$ et $S_a^b(f)$ et on a le résultat annoncé. □

2.6.2 Sommes de Riemann

L'idée des sommes de Riemann est un peu différente de celle des sommes de Darboux et constitue une approximation assez utile des intégrales.

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$, soit $\mathcal{S} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de f, soit $\mathcal{E} = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$ une famille de réels tels que $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ pour tout k. On pose

$$R(\mathcal{S}, \mathcal{E}, f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\,.$$

Théorème 2.6.2 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta(\mathcal{S}) \to 0} R(\mathcal{S}, \mathcal{E}, f)\,.$$

Démonstration Par définition du fait que f est intégrable, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions étagées φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$\int_a^b \psi(x) - \varphi(x)\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Donnons-nous une subdivision $\mathcal{S} = \{x_0, \ldots, x_p\}$ de $[a, b]$, de diamètre δ, adaptée à φ. Soit $\mathcal{S}' = \{y_0, \ldots, y_n\}$, une subdivision quelconque, de diamètre $\delta' < \delta$. Dans chaque intervalle $]y_k, y_{k+1}[$, on choisit un point ξ_k. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(y_{k+1} - y_k)\,.$$

Cette somme se divise en deux : ceux des k pour lesquels $]y_k, y_{k+1}[$ est inclus dans un des intervalles $]x_j, x_{j+1}[$, et les autres. Ceux de la deuxième espèce sont au plus au nombre de $p+1$ (car ils chevauchent des intervalles $]x_j, x_{j+1}[$).

On note σ la somme des termes $f(\xi_k)\,(y_{k+1}-y_k)$ de la première espèce et σ' ceux de la deuxième. On a donc $S=\sigma+\sigma'$. On a aussi

$$|\sigma'| \leq \delta' M(p+1)\,,$$

où M est un majorant de φ. Si on choisit $\delta' \leq \varepsilon/(2M(p+1))$ alors $|S-\sigma| \leq \varepsilon/2$.

D'autre part, si k est un point de la première espèce alors φ est constante sur $]y_k, y_{k+1}[$, de valeurs $\varphi(\xi_k)$. Si on rajoute à $\mathcal{S}'$ les $p+1$ points de $\mathcal{S}$ on obtient une subdivision $\mathcal{S}''$ qui est adaptée à φ. La somme σ est alors égale à $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ sauf pour les points de $\mathcal{S}''\setminus\mathcal{S}'$. Ces points sont au plus $p+1$ et l'erreur commise est au plus $\delta' M$. Donc au total

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx - \sigma\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On a montré que

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx - S\right| \leq \varepsilon$$

dès que la subdivision $\mathcal{S}'$ est de diamètre plus petit qu'un seuil fixé.

Appelons $S(f)$ la somme de Riemann apparaissant dans l'énoncé. Si on note $S(\varphi)$ et $S(\psi)$ les mêmes sommes mais avec φ et ψ qui remplacent f, on a alors

$$S(\varphi) \leq S(f) \leq S(\psi)\,.$$

On a aussi montré plus haut que, pour un pas de la subdivision suffisamment petit

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq S(\varphi)$$

et

$$S(\psi) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ce qui donne en tout

$$\int_a^b \varphi(x)-\psi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq S(f) - \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)-\varphi(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Soit finalement

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f)\right| \leq \varepsilon\,.$$

□

Corollaire 2.6.3 *Si f est une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right).$$

Cette dernière identité permet parfois de calculer efficacement certaines limites de sommes. Par exemple, posons

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Alors

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}.$$

Posons $f(t) = 1/(1+t)$, alors

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n).$$

On reconnait la somme de Riemann de f sur $[0,1]$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \ln(2).$$

2.6.3 Estimation d'erreurs

Proposition 2.6.4 *Si f est C^1 sur $[0,1]$ et si on pose*

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

on a

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - R_n\right| \leq \frac{M_1}{2n}$$

où $M_1 = \sup\{|f'(x)|\ ;\ x \in [0,1]\}$.

Démonstration Sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ l'erreur est, en utilisant l'inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(x_k)\,dx\right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\;dx \\
&\leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - x_k|\;dx \\
&= M_1 \left[\frac{(x-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= \frac{M_1}{2n^2}\,.
\end{aligned}$$

Cette erreur étant obtenue sur n intervalles, on a le résultat annoncé. □

On peut améliorer cette approximation en approchant l'intégrale par des trapèzes plutôt que des rectangles. Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ on pose

$$f_n(x) = f(x_k) + \frac{(f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\,(x - x_k)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_n(x)\,dx &= f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{(f(x_{k+1}) - f(x_k))}{x_{k+1} - x_k}\,\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \\
&= f(x_k)\frac{1}{n} + (f(x_{k+1}) - f(x_k))\frac{1}{2n} \\
&= \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2n}\,.
\end{aligned}$$

Posons $T_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Proposition 2.6.5 *Si f est C^2 sur $[0,1]$ alors*

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - T_n\right| \leq \frac{M_2}{12n^2}\,,$$

où $M_2 = \sup\{|f''(x)|\;;\; x \in [0,1]\}$.

Sans preuve.

Enfin, parlons de la méthode de Simpson : on approche f par un arc de parabole sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. En fait, on calcule quel polynôme de degré 2 coïncide avec f aux points x_k, x_{k+1} et $(x_k + x_{k+1})/2$.

Un calcul un peu long donne alors une erreur en $1/n^4$ si f est C^4.

2.6.4 Lien avec les surfaces

Discutons le lien entre intégrale et surface. Il n'y a maintenant presque plus rien à démontrer, si on se base sur une définition intuitive de la notion de surface. Le problème c'est que, étant donné un domaine borné du plan, il n'est pas forcement évident que l'on puisse toujours lui attribuer une surface, voire même on peut être bien embêté pour définir la surface d'un tel ensemble.

L'idée intuitive quel l'on peut avoir est celle qui a toujours prévalue depuis les grecs. On sait bien définir et calculer l'aire des rectangles et des unions de rectangles. On peut facilement en déduire, par des arguments géométriques, l'aire des polygones. Par contre pour des surfaces plus complexes, délimitées par des courbes quelconques, l'idée naturelle est que si on peut encadrer le domaine par deux unions de rectangles de façon à ce que la différence des surfaces est aussi petite que voulue, alors la surface du domaine existe et elle est égale à cette valeur commune de surface.

Théorème 2.6.6 *Soit f une fonction intégrable et positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire du domaine*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,; a \leq x \leq b\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\}\,.$$

Pour f de signe quelconque alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx$ est la différence des surfaces des domaines D_+ et D_- associés à f_+ et à f_-.

Démonstration Les sommes de Darboux sont des sommes de surfaces de rectangles qui encadrent le domaine D comme précisé ci-dessus. Si f est intégrable, on a vu que ces sommes convergent vers l'intégrale de f. □

2.7 Intégrales de suites de fonctions

2.7.1 Ce qui ne marche pas

Dans cette section on va s'intéresser à une famille de problèmes extrêmement importants, mais assez difficile à comprendre. Voici la problématique générale. On a une suite de fonctions (f_n), c'est à dire une famille de fonctions définies sur un même intervalle $[a, b]$ et qui dépendent d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Par exemple :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^n && \text{sur } [0,1] \\ g_n(x) &= \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} && \text{sur } \mathbb{R} \\ h_n(x) &= n^2 x(1-x^2)^n && \text{sur } [0,1]\,. \end{aligned}$$

On s'intéresse à la limite *ponctuelle* de ces fonctions, c'est à dire une fonction f sur $[a, b]$ telle que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,.$$

Dans nos exemples ça donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\,, \\ 1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases} \\ g(x) &= 0 \\ h(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Les principales questions que l'on se pose en général sont : quelles sont les propriétés communes aux f_n qui passent à f ? Si les f_n sont continues, est-ce que f est continue ? Si les f_n sont dérivables, est-ce que f aussi ? Dans ce cas a t-on $f'(x) = \lim_n f_n'(x)$? Même question avec l'intégrabilité ? Est-il vrai que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \text{ ?}$$

Nous allons voir avec les exemples ci-dessus que la réponse est non à toutes les questions posées ci-dessus.

– Les f_n sont continues sur $[0, 1]$, la fonction f ne l'est pas.

– Les g_n sont dérivables, de dérivée

$$g_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)\,.$$

En particulier $g_n'(0) = \sqrt{n}$ qui tend vers $+\infty$, alors que $g(x) = 0$ pour tout x et que donc $g'(0) = 0$.

On a

$$\int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n = \left[\frac{n^2}{-2(n+1)}\,(1-x^2)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)}\,.$$

Donc sa limite est $+\infty$ alors que l'intégrale de h est nulle.

On voit à travers ces contre-exemples qu'il faut faire très attention quand on passe à la limite sur des fonctions. Essayons de voir dans le détail ce qui ne marche pas.

Le fait que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ veut dire que

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,.$$

Dire que f_n est continue c'est

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Enfin, dire que f est continue c'est

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Si on voulait montrer que f est continue, l'idée serait de dire

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|\ .$$

Chacun des trois termes peut être choisi aussi petit qu'on veut, donc on n'aura pas de mal à montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Mais regardons de plus près.

Soit x fixé. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On veut construire $\delta > 0$ comme dans la définition de la continuité de f. Ce x étant fixé, on sait qu'il existe N tel que $|f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$. Ce N étant fixé on choisit $\delta > 0$ tel que $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon/3$ pour tout $|x-y| \leq \delta$. Le problème c'est que ce N dépend de x. Le même N ne marchera pas pour les autres points y, on n'a pas de contrôle sur le terme $|f_N(y) - f(y)|$.

On voit bien ce qui ne marche pas. Et même on voit ce qu'il faudrait changer pour que ça marche ! Si dans l'écriture de la limite des f_n ci-dessus, le même N marchait pour tous les x on aurait démontré la continuité de la limite.

2.7.2 Limite uniforme

On dit qu'une suite (f_n) de fonction sur $[a,b]$ converge *uniformément* vers f sur $[a,b]$ si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,,\ \forall x \in [a,b]\,.$$

On note

$$M_n([a,b]) = \sup\{|f_n(x) - f(x)|\ ;\ x \in [a,b]\}\,.$$

Théorème 2.7.1 *La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} M_n([a,b]) = 0\,.$$

Démonstration Si (f_n) converge uniformément vers f alors

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ n \geq N \Rightarrow \sup\{|f_n(x) - f(x)|\ ,\ x \in [a,b]\} \leq \varepsilon\,.$$

C'est bien la définition de $\lim_{n\to+\infty} M_n([a,b]) = 0$.

La réciproque est facile. $\square$

De manière pratique, comment montre t-on que (f_n) tend uniformément vers f ? Faisons-le avec deux exemples : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ et $g_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ sur $\mathbb{R}$. On calcule d'abord la limite ponctuelle de la suite : $\lim_n f_n(x) = 0$ sur $[0,1[$ et 1 en 1 alors que $\lim_n g_n(x) = 0$. On regarde $|f_n(x) - f(x)|$ et on regarde si le sup pour tous les x tend vers 0 ou non. Ce qui revient au même que d'essayer de trouver une suite (u_n) qui ne dépend pas de x, qui tend vers 0 et qui vérifie $|f_n(x) - f(x)| \le u_n$. Ici on trouve

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \; ; \; x \in [0,1]\} = \sup\{x^n \; ; \; x \in [0,1[\} = 1\,.$$

On n'a pas convergence uniforme dans ce cas. Pour l'autre on trouve

$$|g_n(x) - g(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Ce qui prouve la convergence uniforme dans ce cas.

Théorème 2.7.2 *Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et si chacune des fonctions f_n est continue sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$.*

Démonstration Reprenons ce qu'on avait entamé. Le fait que f est limite uniforme de (f_n) veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ n \ge N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\,,\ \forall x \in [a,b]\,.$$

Dire que f_n est continue c'est

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le \varepsilon\,.$$

Enfin, dire que f est continue c'est

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit n tel que $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon/3$, $\forall x \in [a,b]$. On a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\le \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)|\,.\end{aligned}$$

Soit x fixé, maintenant on choisit $\delta > 0\,;\ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le \varepsilon/3$. On a $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ et on a prouvé la continuité de f au point x. $\square$

Hélas, la convergence uniforme n'est pas suffisante pour assurer la convergence des dérivées, ni même la dérivabilité de la fonction limite. Par exemple, prenons $g_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ sur $[0, \pi]$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle converge uniformément vers la fonction nulle. Pourtant sa dérivée est $\sqrt{n}\cos(nx)$ qui n'est pas identiquement nulle.

En fait pour la dérivabilité, il faut demander la convergence uniforme des dérivées f_n'. Nous donnons ici le résultat à titre informatif seulement.

Théorème 2.7.3 *Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[a, b]$. Si (f_n) converge ponctuellement sur $[a, b]$ vers une fonction f et si (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g, alors f est dérivable sur $[a, b]$, de dérivée $f' = g$.*

Avec l'intégration ça marche mieux.

Théorème 2.7.4 *Si (f_n) est une suite de fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ qui convergent uniformément vers f sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $N \in \mathbb{N}$ associé à la suite (f_n) dans la définition de la convergence uniforme vers f. En particulier, sur chaque intervalle I_k d'une partition $\mathcal{S}$ donnée on a, pour $n \geq N$

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \leq \sup_{I_k} f_n - \inf_{I_k} f_n + 2\varepsilon\,.$$

En particulier

$$S_a^b(f) - s_a^b(f) \leq S_a^b(f_n) - s_a^b(f_n) + 2\varepsilon(b-a)\,.$$

Si on choisit une subdivision telle que $S_a^b(f_n) - s_a^b(f_n) \leq \varepsilon$, on obtient

$$S_a^b(f) - s_a^b(f) \leq (1 + 2(b-a))\varepsilon\,.$$

Cette quantité peut-être rendue arbitrairement petite. Ca prouve l'intégrabilité de f.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon\,dx \\ &= \varepsilon(b-a)\,.\end{aligned}$$

Ce qui prouve la limite annoncée. □