Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 3

SUITES DE FONCTIONS (II) - THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$.
3. Que peut-on en déduire sur la suite $(f_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0;1[$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0;1[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x)$.
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)^n \,\mathrm{d}x$,
2. $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} \,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 5. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \,\mathrm{d}x$.

Indication : on pourra utiliser en la démontrant l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ *pour tout* $u \geq 0$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \displaystyle\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \,\mathrm{d}x$.