
Feuille d'exercices n° 4

CONTINUITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 1. Soit $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit O un ouvert de E.

1. Montrer que si la restriction de f à O, qu'on note $f|_O$ est continue alors f est continue en tout point de O.
2. Supposons que $E = O_1 \bigcup O_2$ avec O_1, O_2 ouverts de E. En déduire que si les restrictions $f|_{O_1}$ et $f|_{O_2}$ sont continues alors f est continue sur E .

Exercice 2. (Facultatif)

Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E.
2. Montrer que f est continue sur U et V.
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$.

Exercice 3. (La continuité et la densité)

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$ surjective continue. Montrer que si $A \subset E$ est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 4. (La "diagonale")

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que $\Delta = \{(y, y), \, y \in F\}$ est un fermé de $F \times F$.
2. Soient f, $g : E \to F$ continues. Montrer que

$$H = \{x \in E; \, f(x) = g(x)\}$$

   est un fermé de E.
3. Montrer que si f, g coincident sur une partie A dense dans E alors $f = g$ sur E.

Exercice 5. (La continuité et la compacité) Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ une application continue de E vers F, et $A \subset E$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que si A est compact, alors $f(A)$ est borné.
3. Montrer que le point précédent est faux si A n'est pas compact.

Exercice 6. (La continuité des applications linéaires) Soient $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. f est continue ;
2. f est continue en 0 ;
3. f est bornée sur la boule unité.
4. Il existe $C \geq 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Déduire de cette équivalence que toute application <u>linéaire</u> $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.

Exercice 7. (Facultatif)

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$, définie pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \| \cdot \|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, | \cdot |) \\ P & \longmapsto & P(c) \end{array} .$$

Montrer que la forme linéaire ϕ_c est continue si et seulement si $c \in]-1; 1[$. Dans ce cas, déterminer la norme de ϕ_c.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\| \, \|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. En déduire que f est continue.

Exercice 9. (Fonctions Lipschitziennes) Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$. On dit que f est Lipschitizienne s'il existe $K > 0$ tel que l'on ait pour tout x_1, $x_2 \in E$,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq K\|x_1 - x_2\|_E.$$

1. Montrer que la composée de deux apllications Lipschitziennes est Lipschitzienne.
2. Montrer qu'une application Lipschitzienne est uniformément continue mais la réciproque n'est pas vraie (considérer sur $[0, \frac{1}{2}]$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).
3. Soit A une partie non vide de E. On considère l'application distance à A, $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = \inf\{\|x - a\|_E \mid a \in A\}. \tag{1}$$

   a. Montrer que d_A est continue.
   b. On suppose désormais que A est une partie compacte de E. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|_E$.