0- INTRODUCTION, MOTIVATIONS

1) Objectifs

Le but de cours est d'étudier des a.l., en particulier des endomorphismes (i.e. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), avec leurs représentations matricielles. L'objectif étant de trouver des bases dans lesquelles la représentation matricielle est la plus simple possible.

La forme idéale à obtenir étant une matrice diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$, certains λ_i pouvant éventuellement être 0.

Ce sera une grande part du cours de déterminer quand une a.l. est diagonalisable ou non.

Hélas ce n'est pas toujours possible, dans ce cas on cherchera malgré des formes les plus simples possibles.

A quoi ça sert ? Le plus souvent à pouvoir calculer M^k.

En effet, si $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$M^k = PD^kP^{-1}$, avec $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$. D'où un calcul faisable.

2) Un exemple pour illustrer

Voici un exemple, issu d'un calcul que je faisais cet été pour ma recherche. C'est juste une étape de calcul, vous risquez d'avoir du mal à comprendre pour le moment, mais je le trouve génial car il contient tout.

On se donne une matrice initiale $\rho_0(\eta) \in M_2(\mathbb{R})$ (ou $M_2(\mathbb{C})$)

et on pose : $\mathcal{L}(\rho_0) = B\rho_0(\eta)\,{}^tB\,e^{i\eta} + C\rho_0(\eta)\,{}^tC\,e^{-i\eta}$,

où $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\eta \in \mathbb{R}$.

(transformation d'un état quantique sous l'action d'un canal quantique dissipatif). Le but est de pouvoir calculer $\rho_n(\eta) = \mathcal{L}^n(\rho_0(\eta))$ et sa limite (ou plus exactement $Tr(\rho_n(\eta))$).

$\mathcal{L}$ est une a.l. de $M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$. Donc d'un e.v. de dim 4 dans lui-même. On va déterminer sa matrice.

On choisit une base de $M_2(\mathbb{C})$, la base canonique :

$$e_1 = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, on regarde l'application :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} M_2(\mathbb{C}) & \to & M_2(\mathbb{C}) \\ \rho & \mapsto & A\rho \end{array}$$ Quelle est sa matrice ?

Pour cela il faut calculer $\varphi(e_i)$.

$$\varphi(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$$

$$\varphi(e_2) = Ae_2 = \begin{pmatrix} z & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & z & 0 & 0 \\ y & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & y & t \end{pmatrix}$$

Idem avec $\psi : \rho \mapsto \rho A \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ z & 0 & t & 0 \\ 0 & z & 0 & t \end{pmatrix}$

On a donc la matrice de $\mathcal{L}$:

$$\Pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\eta} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-i\eta}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\eta} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} e^{-i\eta}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\eta} & e^{i\eta} & e^{i\eta} & e^{i\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\eta} & -e^{-i\eta} & -e^{-i\eta} & e^{-i\eta} \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans cette base $\rho_0(\eta) = \begin{pmatrix} x_0(\eta) \\ \vdots \\ t_0(\eta) \end{pmatrix}$ et $\mathcal{L}(\rho_0(\eta)) = \Pi \rho_0(\eta)$. Donc $\rho_n(\eta) = \Pi^n \rho_0(\eta)$. Il faut calculer Π^n.

Il faut trouver une bonne base.

On prend la base suivante :

$$\underset{g_1}{\begin{pmatrix} e^{i\eta} \\ 0 \\ 0 \\ e^{-i\eta} \end{pmatrix}}, \quad \underset{g_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{g_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{g_4}{\begin{pmatrix} 2\sin\eta \\ -2\cos\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

dans laquelle Π a la forme la plus simple possible :

$$N = \begin{pmatrix} \cos\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c'est tout le travail de ce cours de savoir déterminer cette base et cette forme optimale !)

On a donc $\Pi = PNP^{-1}$ et $\Pi^n = PN^nP^{-1}$, avec $N^n = \begin{pmatrix} \cos^n\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$.

Donc si $f_0(\eta) = \begin{pmatrix} a(\eta) \\ \vdots \\ d(\eta) \end{pmatrix}$ dans la base $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, on a

$$f_n(\eta) = \begin{pmatrix} \cos^n(\eta)\, a_0(\eta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ dans cette même base.

$$\boxed{f_n(\eta) = a_0(\eta) \cos^n(\eta) \begin{pmatrix} e^{i\eta} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta} \end{pmatrix}}$$