SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

STÉPHANE ATTAL
PAUL-ANDRÉ MEYER

Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 312-327.
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__312_0>

INTERPRÉTATION PROBABILISTE ET EXTENSION DES INTÉGRALES STOCHASTIQUES NON COMMUTATIVES

Stéphane ATTAL et Paul-André MEYER

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

0 Résumé

Nous donnons une nouvelle présentation des intégrales stochastiques non commutatives définies par Hudson et Parthasarathy [4]. Cette approche, suggérée la première fois par Meyer [5], se place dans une interprétation probabiliste de l'espace de Fock en définissant ces intégrales d'opérateurs grâce à des équations différentielles stochastiques (classiques). Elle permet de voir explicitement l'action de ces opérateurs sur les variables aléatoires de l'espace de Fock.

Nous montrons que ce point de vue est équivalent à celui de Hudson et Parthasarathy sur le domaine $\mathcal{E}_{lb}$ des exponentielles stochastiques à coefficient localement borné. Mais il a l'avantage, dans le cas où les opérateurs considérés sont bornés, d'avoir un sens en dehors de $\mathcal{E}_{lb}$, contrairement au précédent. Nous définissons ainsi une extension probabiliste des intégrales stochastiques non commutatives. Nous donnons une condition suffisante pour que de telles intégrales soient prolongeables à tout l'espace de Fock. Nous montrons que nous avons alors une vraie formule d'Ito non commutative pour la composition des opérateurs. Ce qui nous permet d'exhiber une algèbre de semimartingales non commutatives.

Nous donnons enfin plusieurs applications de cette extension, en particulier une qui permet de donner une interprétation de quatres opérations fondamentales du calcul stochastique classique au moyen des intégrales stochastiques non commutatives.

I Introduction

Notations

Tout cet article est fait dans le cadre d'espaces vectoriels réels, par souci de simplication, mais il n'y aurait aucune difficulté supplémentaire à les considérer complexes. De même, tout l'article est fait dans l'interprétation brownienne de l'espace de Fock, toujours par souci de simplification, mais ce qui est énoncé ici ne dépend pas de l'interprétation probabiliste choisie.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'espace de Wiener. Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement bronien canonique sur Ω, soient $\mathcal{F}_{t]}$, *resp.* $\mathcal{F}_{[t}$, $\mathcal{F}_{[s,t]}$, les tribus engendrées par les variables aléatoires $\{W_u;\ u \leq t\}$, *resp.* $\{W_u - W_t;\ u \geq t\}$, $\{W_u - W_s;\ s \leq u \leq t\}$, $s \leq t \in I\!R^+$.

Soient $\Phi, \Phi_{t]}, \Phi_{[t}, \Phi_{[s,t]}$ les espaces de Fock symétriques construits respectivement sur $L^2(I\!R^+), L^2([0,t]), L^2([t,+\infty[)$ et $L^2([s,t])$.

On a alors les identifications suivantes (cf [6]) :

$$\begin{cases} \Phi \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Phi_{t]} \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t]}, P) \\ \Phi_{[t} \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}_{[t}, P) \\ \Phi_{[s,t]} \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}_{[s,t]}, P). \end{cases}$$

La projection orthogonale de Φ sur $\Phi_{t]}$ est notée $I\!E_t$ (c'est l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$). Pour tout $u \in L^2(I\!R^+)$, nous noterons $\varepsilon(u)$ l'exponentielle stochastique de la variable aléatoire $\int_0^\infty u(s)\, dW_s$ et, pour tout $s \leq t$,

$$\begin{cases} u_{t]} = u 1\!\!1_{[0,t]}, \\ u_{[t} = u 1\!\!1_{[t,+\infty[}, \\ u_{[s,t]} = u 1\!\!1_{[s,t]}. \end{cases}$$

Rappelons que la martingale $\varepsilon(u_{t]})$ admet la représentation prévisible suivante : $\varepsilon(u_{t]}) = 1 + \int_0^t u(s)\, \varepsilon(u_{s]})\, dW_s$. Ainsi on a

$$< \varepsilon(u_{t]})\,,\, \varepsilon(v_{t]}) > = exp\Big(\int_0^t u(s)v(s)\, ds\Big), \quad \text{pour tous } u, v \in L^2(I\!R^+).$$

Soit $L^2_{lb}(I\!R^+)$ le sous-espace des éléments de $L^2(I\!R^+)$ qui sont localement bornés. Nous noterons $\mathcal{E}_{lb}$ l'espace des combinaisons linéaires finies de vecteurs $\varepsilon(u)$, pour $u \in L^2_{lb}(I\!R^+)$. Rappelons que ce sous-espace est dense dans Φ.

Éléments de calcul stochastique non commutatif

Nous rappelons ici quelques éléments du calcul stochastique non commutatif de Hudson et Parthasarathy [4].

Grâce à l'indépendance des accroissements du mouvement brownien on a sur Φ une structure de produit tensoriel continu : pour $s \leq t$,

$$\Phi \simeq \Phi_{s]} \otimes \Phi_{[s,t]} \otimes \Phi_{[t}.$$

Une famille d'opérateurs $(H_t)_{t\geq 0}$ de Φ dans Φ, définie sur $\mathcal{E}_{lb}$, est un *processus adapté* d'opérateurs si, pour tout $u \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$, l'application $t \mapsto H_t\varepsilon(u_{t]})$ est fortement mesurable dans Φ et si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} H_t\,\varepsilon(u_{t]}) \in \Phi_{t]} \\ H_t\,\varepsilon(u) = [H_t\varepsilon(u_{t]})]\,\varepsilon(u_{[t}). \end{cases}$$

C'est à dire si $H_t = H_{t]} \otimes I_{[t}$ dans la structure $\Phi \simeq \Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$, pour un opérateur $H_{t]}$ de $\Phi_{t]}$ dans lui-même ($I_{[t}$ désignant l'identité de $\Phi_{[t}$).

Un processus adapté d'opérateurs $(M_t)_{t\geq 0}$ est une *martingale d'opérateurs* si, pour tous $s \leq t$, tous $u, v \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$,

$$< \varepsilon(u_{s]})\,,\, M_t\,\varepsilon(v_{s]}) > = < \varepsilon(u_{s]})\,,\, M_s\,\varepsilon(v_{s]}) >,$$

i.e. $\mathbb{E}_s\, M_t\, \mathbb{E}_s = \mathbb{E}_s\, M_s\, \mathbb{E}_s$ $(= M_s\, \mathbb{E}_s)$.

Si T est un opérateur sur Φ, de domaine $\mathcal{E}_{lb}$, la famille $(T_t)_{t\geq 0}$, définie par

$$T_t\varepsilon(u) = [\mathbb{E}_t\, T\varepsilon(u_{t]})]\,\varepsilon(u_{[t}), \quad t \in \mathbb{R}^+,\ u \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+),$$

est une martingale d'opérateurs, appelée *martingale associée* à T.

On a les trois martingales d'opérateurs particulières de création, d'annihilation et de nombre, respectivement notées $(A_t^+)_{t\geq 0}$, $(A_t^-)_{t\geq 0}$, $(A_t^\circ)_{t\geq 0}$ et définies par

$$< \varepsilon(u)\,,\, A_t^+\,\varepsilon(v) > = < \varepsilon(u)\,,\, \varepsilon(v) > \int_0^t u(s)\,ds$$

$$< \varepsilon(u)\,,\, A_t^-\,\varepsilon(v) > = < \varepsilon(u)\,,\, \varepsilon(v) > \int_0^t v(s)\,ds$$

$$< \varepsilon(u)\,,\, A_t^\circ\,\varepsilon(v) > = < \varepsilon(u)\,,\, \varepsilon(v) > \int_0^t u(s)v(s)\,ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et tous $u, v \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$.

Si H°, H^+, H^- et H sont des processus d'opérateurs adaptés vérifiant, pour tout $u \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$, $t \in \mathbb{R}^+$,

$$(1)\quad \int_0^t |u(s)|\,||H_s^-\varepsilon(u)|| + ||H_s^+\varepsilon(u)||^2 + ||H_s\,\varepsilon(u)|| + |u(s)|^2||H_s^\circ\varepsilon(u)||^2\,ds < \infty$$

alors la famille des intégrales stochastiques non commutatives

$$(2)\quad T_t = \int_0^t H_s^\circ\,dA_s^\circ + \int_0^t H_s^-\,dA_s^- + \int_0^t H_s^+\,dA_s^+ + \int_0^t H_s\,ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

est bien définie sur $\mathcal{E}_{lb}$, comme un processus adapté d'opérateurs vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et tous $u, v \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$,

$$(3) \quad < \varepsilon(u)\,,\, T_t\,\varepsilon(v) > = \int_0^t < \varepsilon(u)\,,\, u(s)v(s)\,H^\circ_s \varepsilon(v) + v(s)\,H^-_s \varepsilon(v) + \\ + u(s)\,H^+_s \varepsilon(v) + H_s\,\varepsilon(v) > ds.$$

Remarque 1 : Les conditions de normes (1) que l'on impose ici sont moins restrictives que celle de Hudson et Parthasarathy.

Remarque 2 : Si le processus adapté $(T_t)_{t \geq 0}$ vérifie (2), il est montré dans [4] que $\int_0^t |u(s)|^2 \, ||T_s \varepsilon(u_{s]})||^2 \, ds < \infty$.

Remarque 3 : Si les processus adjoints $(H^\varepsilon)^*$ sont aussi définis sur $\mathcal{E}_{lb}$ et si l'expression

$$\int_0^t |u(s)| \, ||(H^+_s)^* \varepsilon(u)|| + ||(H^-_s)^* \varepsilon(u)||^2 + ||H^*_s \varepsilon(u)|| + |u(s)|^2 ||(H^\circ_s)^* \varepsilon(u)||^2 \, ds$$

est finie, alors le processus $(T^*_t)_{t \geq 0}$ admet la représentation intégrale

$$T^*_t = \int_0^t (H^\circ_s)^* \, dA^\circ_s + \int_0^t (H^+_s)^* \, dA^-_s + \int_0^t (H^-_s)^* \, dA^+_s + \int_0^t H^*_s \, ds \; .$$

Remarque 4 : L'intégrale stochastique non commutative T_t, peut être définie pour $t = +\infty$ de la même façon si (1) est vérifié pour $t = +\infty$. Pour tout $\varepsilon \in \{+, \circ, -\}$, la martingale associée à l'opérateur $\int_0^\infty H^\varepsilon_s \, dA^\varepsilon_s$ est alors $\left(\int_0^t H^\varepsilon_s \, dA^\varepsilon_s\right)_{t \geq 0}$.

Remarque 5 : L'unicité d'une représentation intégrale du type (2) a été démontrée dans [2] dans le cas où tous les opérateurs sont fermables.

Dans la suite, chaque fois qu'une de ces intégrales d'opérateurs apparaîtra, nous supposerons que les processus H°, H^+, H^- et H vérifient (1).

Par commodité, le terme ds sera parfois noté dA_s, où il faut imaginer que le A comporte en exposant un symbole invisible. Cette notation nous permettra de parler des intégrales de la forme $\int_0^t H^\varepsilon_s \, dA^\varepsilon_s$, pour $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \ \ \}$; ces intégrales seront notées I^ε_t.

II Interprétation probabiliste

Nous allons expliquer tout d'abord la démarche intuitive qui a conduit à donner une nouvelle interprétation des intégrales stochastiques non commutatives.

Les définitions initiales des martingales $(A_t^+)_{t\geq 0}$, $(A_t^-)_{t\geq 0}$ et $(A_t^\circ)_{t\geq 0}$ (cf [7]) donnent

$$\begin{cases} dA_t^+ \mathbb{1} = dW_t & dA_t^+ \, dW_t = 0 \\ dA_t^\circ \mathbb{1} = 0 & dA_t^\circ \, dW_t = dW_t \\ dA_t^- \mathbb{1} = 0 & dA_t^- \, dW_t = dt \\ dA_t \mathbb{1} = dt & dA_t \, dW_t = 0. \end{cases}$$

Pour un $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \ \}$, on se donne une intégrale d'opérateurs I_t^ε sur Φ et un vecteur $f \in \Phi$, de martingale associée $(f_t)_{t\geq 0}$ et de représentation prévisible $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \dot{f}_s \, dW_s$. L'idée présentée dans [7] est que la famille adaptée $(I_t^\varepsilon f_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale qui doit vérifier une formule d'intégration par parties d'Ito

$$\begin{aligned} d(I_t^\varepsilon f_t) &= (dI_t^\varepsilon) f_t + I_t^\varepsilon (df_t) + (dI_t^\varepsilon)(df_t) \\ &= (H_t^\varepsilon \, dA_t^\varepsilon) f_t + I_t^\varepsilon (\dot{f}_t \, dW_t) + (H_t^\varepsilon \, dA_t^\varepsilon)(\dot{f}_t \, dW_t). \end{aligned}$$

Ce qui, dans la structure $\Phi_{t+dt]} \simeq \Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t\,,\,t+dt]}$, s'écrit

$$\begin{aligned} d(I_t^\varepsilon f_t) &= (H_t^\varepsilon \otimes dA_t^\varepsilon)(f_t \otimes \mathbb{1}) + (I_t^\varepsilon \otimes I)(\dot{f}_t \otimes dW_t) + (H_t^\varepsilon \otimes dA_t^\varepsilon)(\dot{f}_t \otimes dW_t). \\ &= H_t^\varepsilon f_t \otimes dA_t^\varepsilon \mathbb{1} + I_t^\varepsilon \dot{f}_t \otimes dW_t + H_t^\varepsilon \dot{f}_t \otimes dA_t^\varepsilon \, dW_t. \end{aligned}$$

On obtient finalement l'équation

$$d(I_t^\varepsilon F_t) = I_t^\varepsilon \dot{f}_t \, dW_t + \begin{cases} H_t^+ f_t \, dW_t & \text{si } \varepsilon = + \\ H_t^\circ \dot{f}_t \, dW_t & \text{si } \varepsilon = \circ \\ H_t^- \dot{f}_t \, dt & \text{si } \varepsilon = - \\ H_t f_t \, dt & \text{si } \varepsilon = \ \ . \end{cases}$$

Ce sont ces équations qui nous amènent à poser une nouvelle définition des intégrales stochastiques non commutatives, dont nous montrerons ensuite qu'elle est équivalente à celle de Hudson et Parthasarathy sur le domaine $\mathcal{E}_{lb}$.

Extension des intégrales stochastiques non commutatives

Supposons que $(T_t)_{t\geq 0}$ soit un processus d'opérateurs <u>bornés</u> de Φ dans Φ. Supposons que sur $\mathcal{E}_{lb}$ les opérateurs T_t soient de la forme (2), pour des processus adaptés H^ε, $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \ \}$, d'opérateurs <u>bornés</u>. Tous les opérateurs considérés étant bornés, ils sont définis sur tout Φ. La définition (3) des intégrales stochastiques non commutatives n'a, a priori, pas d'extension évidente en dehors du domaine $\mathcal{E}_{lb}$. Par contre, les équations intuitives obtenues plus haut ont un sens lorsque f est quelconque dans Φ. C'est ce qui nous amène à poser une nouvelle définition pour les intégrales stochastiques non commutatives.

Avant tout, il nous faut remarquer que la condition (1) peut s'écrire d'une autre manière. Pour tout $f \in \mathcal{E}_{lb}$, de martingale associée $(f_t)_{t\geq 0}$ et de représentation prévisible $f_t = c + \int_0^t \dot{f}_s \, dW_s$, la condition (1) s'écrit

$$(1') \qquad \int_0^t ||H_s^- \dot{f}_s|| + ||H_s^+ f_s||^2 + ||H_s f_s|| + ||H_s^\circ \dot{f}_s||^2 \, ds < \infty$$

Définition : Un domaine $D \subset \Phi$ sera *admissible* s'il contient $\mathcal{E}_{lb}$ et si pour tout $f \in D$, de martingale associée $(f_t)_{t\geq 0}$ et de représentation prévisible $f_t = c + \int_0^t \dot{f}_s \, dW_s$, on a $f_t \in D$ et $\dot{f}_t \in D$ pour (presque) tout t.

Définition : Soient H^ε, $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \ \}$, des processus d'opérateurs définis sur un domaine admissible D, soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs fermables définis sur D. Nous dirons que T_t admet la représentation (2) *étendue à D* si, pour tout $f \in D$, de martingale associée $(f_t)_{t\geq 0}$ et de représentation prévisible $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \dot{f}_s \, dW_s$, les processus H^ε vérifient (1'), si $\int_0^t ||T_s \dot{f}_s||^2 \, ds < \infty$ et si, pour tout t,

$$(4) \quad T_t f_t = \int_0^t (T_s + H_s^\circ)\dot{f}_s \, dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{f}_s \, ds + \int_0^t H_s^+ f_s \, dW_s + \int_0^t H_s f_s \, ds \, .$$

Avant d'énoncer les résultats liés à cette définition, il nous appartient de vérifier que la relation (4), pour des processus H^ε donnés, détermine le processus T de manière unique. Ce resultat est en fait une conséquence du théorème qui suit. En effet, on va prouver que sur $\mathcal{E}_{lb}$, l'équation (4) est une équation différentielle stochastique classique qui admet une solution unique. L'espace $\mathcal{E}_{lb}$ est dense dans D, l'opérateur T_t^* est densément défini (car T_t est fermable), donc la valeur de T_t sur D est déterminée par limites faibles de ses valeurs sur $\mathcal{E}_{lb}$.

Il faut aussi remarquer qu'un processus T n'admettra de représentation integrale sur le domaine Φ que si tous les operateurs considérés sont borné (en effet tout operateur fermable dont le domaine est l'espace tout entier est borné).

Théorème 1 – *Sur le domaine admissible $\mathcal{E}_{lb}$ la définition étendue* (4) *des intégrales stochastiques non commutatives est équivalente à la définition* (3) *de Hudson et Parthasarathy.*

Démonstration

Nous allons montrer que l'on peut passer de la forme "scalaire" (3) à la forme "vectorielle" (4). Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs de Φ dans Φ, défini sur $\mathcal{E}_{lb}$, de la forme (2). Les processus H^ε vérifient (1), donc (1'). De plus, la condition $\int_0^t |u^2(s)| ||T_s \varepsilon(u_{s]})||^2 \, ds < \infty$ est vérifiée (remarque 2). D'après

(3), on a pour tous u, v dans $L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$,

$$< \varepsilon(u_{t]}) \, , T_t \, \varepsilon(v_{t]}) > = \int_0^t < \varepsilon(u_{t]}) \, , u(s)v(s) \, H_s^\circ \varepsilon(v_{t]}) + v(s) \, H_s^- \varepsilon(v_{t]}) +$$
$$+ u(s) \, H_s^+ \varepsilon(v_{t]}) + H_s \, \varepsilon(v_{t]}) > ds.$$

Grâce à l'adaptation des opérateurs H_s^ε, $s \in [0,t]$ et à la structure de produit tensoriel continu $\Phi_{t]} \simeq \Phi_{s]} \otimes \Phi_{[s,t]}$, cette égalité s'écrit

$$< \varepsilon(u_{t]}) \, , T_t \, \varepsilon(v_{t]}) > =$$
$$= \int_0^t < \varepsilon(u_{s]}) \, , u(s)v(s) \, H_s^\circ \varepsilon(v_{s]}) + v(s) \, H_s^- \varepsilon(v_{s]}) + u(s) \, H_s^+ \varepsilon(v_{s]}) + H_s \, \varepsilon(v_{s]}) >$$
$$< \varepsilon(u_{[s,t]}) \, , \varepsilon(v_{[s,t]}) > ds.$$
$$= exp \left(\int_0^t u(s)v(s) \, ds \right) \int_0^t \Big[< \varepsilon(u_{s]}) \, , u(s)v(s) \, H_s^\circ \varepsilon(v_{s]}) + v(s) \, H_s^- \varepsilon(v_{s]}) +$$
$$+ u(s) \, H_s^+ \varepsilon(v_{s]}) + H_s \, \varepsilon(v_{s]}) > exp \left(- \int_0^s u(r)v(r) \, dr \right) \Big] \, ds.$$

Ce que nous écrivons, pour simplifier un moment, sous la forme

$$< \varepsilon(u_{t]}) \, , T_t \, \varepsilon(v_{t]}) > = exp \Big(\int_0^t u(s)v(s) \, ds \Big) \int_0^t \Big[K(s) \, exp \Big(- \int_0^s u(r)v(r) \, dr \Big) \Big] \, ds.$$

Par différentiation

$$\frac{d}{dt} < \varepsilon(u_{t]}) \, , T_t \, \varepsilon(v_{t]}) > =$$
$$= u(t)v(t) \, exp \left(\int_0^t u(s)v(s) \, ds \right) \int_0^t \Big[K(s) \, exp \left(- \int_0^s u(r)v(r) \, dr \right) \Big] \, ds +$$
$$+ exp \left(\int_0^t u(s)v(s) \, ds \right) K(t) \, exp \left(- \int_0^t u(s)v(s) \, ds \right).$$

D'où finalement

$$< \varepsilon(u_{t]}) \, , T_t \, \varepsilon(v_{t]}) > = \int_0^t u(s)v(s) < \varepsilon(u_{s]}) \, , T_s \, \varepsilon(v_{s]}) > ds + \int_0^t K(s) \, ds.$$

Quand u et v sont localement bornées, cette équation différentielle (ordinaire) admet une solution unique. Grâce à la forme de la représentation prévisible de $\varepsilon(u_{t]})$ et en remplaçant K_t par sa valeur, cette équation s'écrit

$$< \varepsilon(u_{t]}) \, , T_t \, \varepsilon(v_{t]}) > = < \varepsilon(u_{t]}) \, , \int_0^t v(s) T_s \, \varepsilon(v_{s]}) \, dW_s > +$$
$$+ < \varepsilon(u_{t]}) \, , \int_0^t v(s) \, H_s^\circ \varepsilon(v_{s]}) \, dW_s + \int_0^t v(s) \, H_s^- \varepsilon(v_{s]}) \, ds + \int_0^t H_s^+ \varepsilon(v_{s]}) \, dW_s +$$
$$+ \int_0^t H_s \, \varepsilon(v_{s]}) \, ds >.$$

L'espace $\mathcal{E}_{lb}$ étant dense dans Φ, on peut éliminer les produits scalaires avec $\varepsilon(u_{t]})$ pour en déduire une égalité vectorielle. En notant que si $g_t = \varepsilon(v_{t]})$ on a $\dot{g}_s = v(s)\varepsilon(v_{s]})$, $s \leq t$, cette égalité prend la forme

$$T_t\, g_t = \int_0^t (T_s + H_s^\circ)\dot{g}_s\, dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{g}_s\, ds + \int_0^t H_s^+ g_s\, dW_s + \int_0^t H_s\, g_s\, ds.$$

Ce qui prouve le théorème dans un sens.

Réciproquement, sur $\mathcal{E}_{lb}$, l'équation (4) est une équation différentielle stochastique admettant une solution unique. En prenant le produit scalaire des deux membres de (4) avec un $\varepsilon(u_{t]})$, on voit facilement que l'on peut remonter la démonstration précédente jusqu'à (3). ■

Remarquons maintenant que, si on ajoute un terme initial à T_t, i.e. si T_t est de la forme $T_t = \lambda I + I_t^\circ + I_t^- + I_t^+ + I_t$, alors, d'aprés le résultat précédent, nous avons

$$(T_t - \lambda I)g_t =$$
$$= \int_0^t (T_s - \lambda I + H_s^\circ)\dot{g}_s\, dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{g}_s\, ds + \int_0^t H_s^+ g_s\, dW_s + \int_0^t H_s g_s\, ds.$$

C'est à dire

$$T_t g_t = \lambda \mathbb{E}[g] + \int_0^t (T_s + H_s^\circ)\dot{g}_s\, dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{g}_s\, ds + \int_0^t H_s^+ g_s\, dW_s + \int_0^t H_s g_s\, ds.$$

Nous allons donner une condition suffisante pour qu'une indentité du type (4), vérifiée sur $\mathcal{E}_{lb}$, puisse être étendue à un domaine admissible D.

Théorème 2 – *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs de Φ dans Φ admettant une représentation intégrale du type* (2) *sur $\mathcal{E}_{lb}$, avec terme initial, pour des processus adaptés H^ε, $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \ \}$. Supposons qu'il existe un domaine admissible D sur lequel sont définis tous les opérateurs et sur lequel sont vérifiées les conditions de normes (1') et $\int_0^t \|T_s \dot{f}_s\|^2\, ds < \infty$.*

Si les processus des adjoints $(H^\varepsilon)^*$ vérifient les conditions de normes de la remarque 3 *alors la représentation intégrale de $(T_t)_{t\geq 0}$ est vraie au sens étendu* (4) *sur tout D.*

Démonstration

Par le théorème 1, on a, pour tout $f \in \mathcal{E}_{lb}$,

$$T_t f_t = \lambda \mathbb{E}[f] + \int_0^t (T_s + H_s^\circ)\dot{f}_s\, dW_s + \int_0^t H_s^- \dot{f}_s\, ds + \int_0^t H_s^+ f_s\, dW_s + \int_0^t H_s f_s\, ds.$$

Notons $A(f_t)$ l'expression du second membre. Soit $f \in D$, soit $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{E}_{lb}$ qui converge vers f. Pour tout $g \in \mathcal{E}_{lb}$ on a

$$
\begin{aligned}
&|< g_t\,,\, T_t f_t - A(f_t) >| \leq \\
&\leq |< g_t\,,\, T_t f_t - T_t f_t^n >| + |< g_t\,,\, T_t f_t^n - A(f_t^n) >| + |< g_t\,,\, A(f_t - f_t^n) >| \\
&\leq ||T_t^* g_t||\,||f_t - f_t^n|| + |< g_t\,,\, A(f_t - f_t^n) >|
\end{aligned}
$$

Il suffit donc de montrer que l'application linéaire $f_t \mapsto \, < g_t\,,\, A(f_t) >$ est continue.

$$
\begin{aligned}
&|< g_t\,,\, A(f_t) >| \leq \\
&\leq |< g_t\,,\, \lambda f_t >| + \int_0^t |< \dot g_s\,,\, T_s \dot f_s >|\, ds + \int_0^t |< \dot g_s\,,\, H_s^\circ \dot f_s >|\, ds + \\
&\qquad + \int_0^t |< g_t\,,\, H_s^- \dot f_s >|\, ds + \int_0^t |< \dot g_s\,,\, H_s^+ f_s >|\, ds + \int_0^t |< g_t\,,\, H_s f_s >|\, ds.
\end{aligned}
$$

En passant à l'adjoint dans tous les produits scalaires et en appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$
\begin{aligned}
&|< g_t\,,\, A(f_t) >| \leq \\
&\leq ||g_t||\,|\lambda|\,||f_t|| + \int_0^t ||T_s^* \dot g_s||\,||\dot f_s||\, ds + \int_0^t ||(H_s^\circ)^* \dot g_s||\,||\dot f_s||\, ds + \\
&\qquad + \int_0^t ||(H_s^-)^* g_t||\,||\dot f_s||\, ds + \int_0^t ||(H_s^+)^* \dot g_s||\,||f_t||\, ds + \int_0^t ||H_s^* g_t||\,||f_t||\, ds \\
&\leq \Big[||g_t||\,|\lambda| + \int_0^t ||(H_s^+)^* \dot g_s||\, ds + \int_0^t ||H_s^* g_t||\, ds + \Big(\int_0^t ||T_s^* \dot g_s||^2\, ds\Big)^{1/2} + \\
&\qquad + \Big(\int_0^t ||(H_s^\circ)^* \dot g_s||^2\, ds\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^t ||(H_s^-)^* g_t||^2\, ds\Big)^{1/2} \Big]\, ||f_t||.
\end{aligned}
$$

On conclut grâce aux remarques 3 et 2 et à la fermabilité de T_t (son adjoint est densément défini). ■

Ce que l'on peut retirer de cette démonstration c'est que si T et T^* admettent une représentation intégrale du type (4) sur $\mathcal{E}_{lb}$, alors **l'identité (4) pour T et T^* s'étend à tout vecteur f tel que les deux membres de (4) soient bien définis.**

Nous disposons donc d'une extension des intégrales stochastiques non commutatives, ainsi que de conditions suffisantes pour pouvoir l'appliquer. L'équation (4) donne la valeur d'une intégrale étendue appliquée à un vecteur de la forme $\int_0^t g_s\, dW_s$. Mais il arrive parfois que des vecteurs de Φ apparaissent plus naturellement sous la forme $\int_0^t v_s\, ds$. C'est ce qui motive le résultat suivant, qui est un élément important pour la formule d'Ito non commutative présentée plus loin.

Proposition 3 – *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un processus d'opérateurs bornés admettant une représentation intégrale étendue sur tout Φ. Soit g un élément de $\Phi_{t]}$ de la forme $g = \int_0^t v_s\, ds$, où v_s est dans $\Phi_{s]}$ pour presque tout s. Alors, si on pose $g^s = \int_0^s v_u\, du$,*

$$T_t g_t = \int_0^t T_s v_s\, ds + \int_0^t (H_s^+ + H_s) g^s\, ds.$$

Démonstration

Pour presque tout s, le vecteur v_s admet une représentation prévisible $v_s = c + \int_0^s h(s,u)\, dW_u$. Par la formule (4), on a

$$\begin{aligned} T_t g_t = \int_0^t T_t v_s\, ds = \int_0^t \Big[\Big[\int_0^s T_u h(s,u)\, dW_u + \int_0^s H_u^\circ h(s,u)\, dW_u + \\ + \int_0^s H_u^- h(s,u)\, du + \int_0^t H_u^+ \mathbb{E}_u v_s\, dW_u + \int_0^t H_u \mathbb{E}_u v_s\, du\Big]\, ds \\ = \int_0^t \Big[T_s v_s + \int_s^t H_u^+ v_s\, dW_u + \int_s^t H_u v_s\, du\Big]\, ds. \end{aligned}$$

En intervertissant les intégrales doubles on obtient

$$T_t g_t = \int_0^t T_s v_s\, ds + \int_0^t \int_0^s H_s^+ v_u\, du\, dW_s + \int_0^t \int_0^s H_s v_u\, du\, ds.$$

Ce qui permet de conclure (rappellons que les operateurs H_s^+ et H_s sont forcement bornés) . ■

Extension de la formule d'Ito non commutative

Nous allons d'abord présenter intuitivement ce que pourrait être une formule d'intégration par parties pour les intégrales stochastiques non commutatives. Nous énoncerons ensuite sa forme rigoureuse donnée dans [4], puis nous verrons comment elle s'étend dans notre nouveau cadre.

Pour $\varepsilon, \varepsilon'$ dans $\{+, \circ, -, \ \}$, soient I_t^ε et $I_t^{\varepsilon'}$ deux intégrales stochastiques non commutatives par rapport à A^ε et à $A^{\varepsilon'}$ respectivement. Une formulation intuitive d'une formule d'Ito dans ce contexte serait :

$$\begin{aligned} d(I_t^\varepsilon I_t^{\varepsilon'}) &= (dI_t^\varepsilon) I_t^{\varepsilon'} + I_t^\varepsilon (dI_t^{\varepsilon'}) + (dI_t^\varepsilon)(dI_t^{\varepsilon'}) \\ &= H_t^\varepsilon I_t^{\varepsilon'}\, dA_t^\varepsilon + I_t^\varepsilon H_t^{\varepsilon'}\, dA_t^{\varepsilon'} + H_t^\varepsilon H_t^{\varepsilon'}\, dA_t^\varepsilon\, dA_t^{\varepsilon'}. \end{aligned} \tag{5}$$

Les différentes valeurs de $dA_t^\varepsilon\, dA_t^{\varepsilon'}$ peuvent être prévues grâce à la table donnant les valeurs des $dA_t^\varepsilon \mathbb{1}$ et des $dA_t^\varepsilon\, dW_t$. On voit alors que les seuls produits $dA_t^\varepsilon\, dA_t^{\varepsilon'}$ non nuls sont

$$\begin{cases} dA^\circ\, dA^\circ = dA^\circ \\ dA^-\, dA^\circ = dA^- \\ dA^\circ\, dA^+ = dA^+ \\ dA^-\, dA^+ = dt. \end{cases}$$

Cette table définit un produit $(\varepsilon,\varepsilon') \mapsto \varepsilon.\varepsilon'$ de $\{+,\circ,-,\ \}$ dans $\{+,\circ,-,\ ,\emptyset\}$, tel que $dA_t^\varepsilon\, dA_t^{\varepsilon'} = dA_t^{\varepsilon.\varepsilon'}$, avec la convention $dA^\emptyset = 0$. Notons, pour tout u dans $L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$, u^ε la fonction qui vaut u si $\varepsilon = +,\circ$, et $\mathbb{1}$ si $\varepsilon = -,\ $. Notons u_ε la fonction qui vaut u si $\varepsilon = -,\circ$, et $\mathbb{1}$ si $\varepsilon = +,\ $. Nous conviendrons que $u^\emptyset = u_\emptyset = 0$.

Avec ces notations et la formule (3), la formule d'Ito (5) prend la forme :

$$< \varepsilon(u_{t]})\,,\, I_t^\varepsilon I_t^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > = \int_0^t u^\varepsilon(s) v_\varepsilon(s) < \varepsilon(u_{t]})\,,\, H_s^\varepsilon I_s^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > ds +$$
$$+ \int_0^t u^{\varepsilon'}(s) v_{\varepsilon'}(s) < \varepsilon(u_{t]})\,,\, I_s^\varepsilon H_s^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > ds +$$
$$+ \int_0^t u^{\varepsilon.\varepsilon'}(s) v_{\varepsilon.\varepsilon'}(s) < \varepsilon(u_{t]})\,,\, H_s^\varepsilon H_s^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > ds.$$

$$(6)\quad < (I_t^\varepsilon)^*\varepsilon(u_{t]})\,,\, I_t^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > = \int_0^t u^\varepsilon(s) v_\varepsilon(s) < (H_s^\varepsilon)^*\varepsilon(u_{t]})\,,\, I_s^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > ds +$$
$$+ \int_0^t u^{\varepsilon'}(s) v_{\varepsilon'}(s) < (I_s^\varepsilon)^*\varepsilon(u_{t]})\,,\, H_s^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > ds +$$
$$+ \int_0^t u^{\varepsilon.\varepsilon'}(s) v_{\varepsilon.\varepsilon'}(s) < (H_s^\varepsilon)^*\varepsilon(u_{t]})\,,\, H_s^{\varepsilon'}\,\varepsilon(v_{t]}) > ds.$$

Dans le cadre général de [4], il n'est pas possible de composer les opérateurs. En effet, ils ne sont définis que sur $\mathcal{E}_{lb}$, or rien ne garantit la stabilité de cet espace sous l'action de ces opérateurs. Aussi la seule forme de formule d'Ito qui ait un sens dans le contexte trés général de Hudson et Parthasarathy est l'équation (6). Cette équation est justement la forme que donne le théorème de Hudson et Parthasarathy à la formule d'intégration par parties non commutative.

Lorsque l'on se place dans le cadre resteint des intégrales étendues au domaine admissible Φ, on peut espérer obtenir une formule du type (5), car on ne travaille qu'avec des opérateurs définis sur tout Φ donc *composables.* C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4 – *La formule d'Ito non commutative* (5), *présentée ci dessus, est vraie dans le cadre des intégrales stochastiques non commutatives partout définies.*

Démonstration

Soient, $T_t = \lambda I + I_t^\circ + I_t^- + I_t^+ + I_t$ et $T'_t = \lambda' I + I_t'^\circ + I_t'^- + I_t'^+ + I'_t$ des intégrales d'opérateurs *étendues* à tout Φ. On a donc, pour tout $f \in \Phi$ de martingale associée $(f_t)_{t\geq 0}$ et de représentation prévisible $f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \dot{f}_s\, dW_s$,

$T'_t f_t =$

$$= \lambda' \mathbb{E}[f] + \int_0^t (T'_s + H_s'^\circ)\dot{f}_s\, dW_s + \int_0^t H_s'^- \dot{f}_s\, ds + \int_0^t H_s'^+ f_s\, dW_s + \int_0^t H'_s f_s\, ds.$$

Pour tout t, on note $h_t'^{\circ} = (T_t' + H_t'^{\circ})\dot{f}_t$, $h_t'^{+} = H_t'^{+} f_t$, $h_t'^{-} = H_t'^{-}\dot{f}_t$ et $h_t' = H_t' f_t$. On a donc

$$T_t T_t' F_t = T_t\Big[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t [h_s'^{\circ} + h_s'^{+}]\, dW_s\Big] + T_t\Big[\int_0^t h_s'^{-}\, ds + \int_0^t h_s'\, ds\Big]$$

$$= \lambda\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ})(h_s'^{\circ})\, dW_s + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ}) h_s'^{+}\, dW_s +$$

$$+ \int_0^t H_s^{-}(h_s'^{\circ})\, ds + \int_0^t H_s^{-} h_s'^{+}\, ds + \int_0^t H_s^{+}\Big[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [h_u'^{\circ}) + h_u'^{+}]\, dW_u\Big]\, dW_s +$$

$$+ \int_0^t H_s\Big[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [(h_u'^{\circ}) + h_u'^{+}]\, dW_u\Big]\, ds + T_t\Big[\int_0^t h_s'^{-}\, ds + \int_0^t h_s'\, ds\Big].$$

Mais, par la proposition 3, on a, pour le dernier terme de cette égalité,

$$T_t \int_0^t [h_s'^{-} + h_s']\, ds = \int_0^t T_s[h_s'^{-} + h_s']\, ds +$$

$$+ \int_0^t H_s^{+} \int_0^s [h_u'^{-} + h_u']\, du\, dW_s + \int_0^t H_s \int_0^s [h_u'^{-} + h_u']\, du\, ds.$$

Lorsque l'on retourne à l'équation initiale, on a ainsi

$$T_t T_t' F_t =$$

$$= \lambda\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t (T_s + H_s^{\circ})(h_s'^{\circ})\, dW_s + \int_0^t (T_s + H^{\circ}) h_s'^{+}\, dW_s + \int_0^t H_s^{-}(h_s'^{\circ})\, ds +$$

$$+ \int_0^t H_s^{-} h_s'^{+}\, ds + \int_0^t H_s^{+}\Big[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [h_u'^{\circ} + h_u'^{+}]\, dW_u + \int_0^s h_u'^{-}\, du + \int_0^s h_u'\, du\Big]\, dW_s$$

$$+ \int_0^t H_s\Big[\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^s [h_u'^{\circ} + h_u'^{+}]\, dW_u + \int_0^s h_u'^{-}\, du + \int_0^s h_u'\, du\Big]\, ds +$$

$$+ \int_0^t T_s h_s'^{-}\, ds + \int_0^t T_s h_s'\, ds.$$

En remplaçant les h'^{ϵ} par leur valeur, on a

$$T_t T_t' F_t = \lambda\lambda' \mathbb{E}[F] + \int_0^t (T_s T_s' + H_s^{\circ} T_s' + T_s H_s'^{\circ} + H_s^{\circ} H_s'^{\circ})\dot{F}_s\, dW_s$$

$$+ \int_0^t (H_s^{-} T_s' + T_s H_s'^{-} + H_s^{-} H_s'^{\circ})\dot{F}_s\, ds + \int_0^t (H_s^{+} T_s' + T_s H_s'^{+} + H_s^{\circ} H_s'^{+}) F_s\, dW_s +$$

$$+ \int_0^t (H_s T_s' + T_s H_s') F_s\, ds + \int_0^t H_s^{-} H_s'^{+} F_s\, ds$$

$$T_tT'_tF_t = \Big[\lambda\lambda' I + \int_0^t (H_s^\circ T'_s + T_s H_s'^\circ + H_s^\circ H_s'^\circ)\, dA_s^\circ +$$
$$+ \int_0^t (H_s^- T'_s + T_s H_s'^- + H_s^- H_s'^\circ)\, dA_s^- + \int_0^t (H_s^+ T'_s + T_s H_s'^+ + H_s^\circ H_s'^+)\, dA_s^+ +$$
$$+ \int_0^t (H_s T'_s + T_s H'_s)\, ds + \int_0^t H_s^- H_s'^+\, ds\Big] F_t.$$

Ce qui démontre l'extension de la formule d'Ito non commutative. ■

Théorème 5 – *Soit S l'ensemble des processus adaptés $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés et représentables sous la forme* (2) *(avec terme initial), pour des processus H^ϵ d'opérateurs bornés tels que*

$t \mapsto ||H_t||$ est localement intégrable

$t \mapsto ||H_t^-||$ et $t \mapsto ||H_t^+||$ sont localement de carré intégrable

$t \mapsto ||H_t^\circ||$ est localement bornée

(S est donc un ensemble de semimartingales non commutatives régulières).

Alors S est une algèbre pour la composition.

Démonstration

Par le théorème 2, un élément de S admet une représentation intégrale étendue sur Φ. On peut donc composer les éléments de S. Leur composition vérifie l'extension de la formule d'Ito non commutative. Il est facile de vérifier sur la dernière égalité de la démonstration du théorème 4 que, si deux semimartingales non commutatives ont une norme localement bornée et vérifient les conditions de normes de l'énoncé, alors leur composé les vérifie aussi.

Il suffit donc de montrer que pour tout élément $(T_t)_{t\geq 0}$ de S on a que $t \mapsto ||T_t||$ est localement bornée.

Intéressons-nous d'abord au terme de la forme $\int_0^t H_s\, ds$ apparaissant dans la représentation intégrale de T. Par l'équation (3), on a, pour tout $u, v \in L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$,

$$<\varepsilon(v_{t]}), \int_0^t H_s\, ds\, \varepsilon(u_{t]})> = <\varepsilon(v_{t]}), \int_0^t H_s\, \varepsilon(u_{t]})\, ds>,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^t H_s\, ds\, \varepsilon(u_{t]}) = \int_0^t H_s\, \varepsilon(u_{t]})\, ds.$$

Donc nous avons l'estimation

$$||\int_0^t H_s\, ds\, \varepsilon(u_{t]})|| \leq \Big(\int_0^t ||H_s||\, ds\Big) ||\varepsilon(u_{t]})||.$$

Ceci prouve que $\int_0^t H_s\,ds$ est un opérateur borné sur $\mathcal{E}_{lb}$, avec une norme localement bornée en t ; il peut donc être étendu en un opérateur borné sur Φ, avec une norme localement bornée en t.

Le processus Y défini par $Y_t = T_t - \int_0^t H_s\,ds$, $t \in \mathbb{R}^+$, est une martingale d'opérateurs bornés. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, tout $s \leq t$ et $f_s \in \Phi_{s]}$, $\mathbb{E}_s Y_t f_s = Y_s f_s$ (par définition des martingales d'opérateurs). Donc $||Y_s|| \leq ||Y_t||$. Ce qui prouve que toutes martingale d'opérateurs bornés a une norme localement bornée en t.

Nous avons donc montré que tous les éléments de $\mathcal{S}$ ont une norme localement bornée. Ceci achève de démontrer le théorème. ■

III Applications

La première application de cette extension a été donnée dans [1]. Dans cet article sont étudiées les transformations $\widetilde{T}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui préservent P et telles que le mouvement brownien $(\widetilde{W_t})_{t\geq 0}$, image de $(W_t)_{t\geq 0}$ par $\widetilde{T}$ soit un mouvement brownien pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. L'opérateur associé sur $L^2(\Omega)$, $TF = F \circ \widetilde{T}$, $F \in L^2(\Omega)$, est une isométrie, morphisme de l'algèbre $L^\infty(\Omega)$, qui commute avec les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_t]$ de la filtration canonique.

Dans cet article est donnée une caractérisation simple et complète de ces opérateurs grâce au calcul stochastique non commutatif.

On voit bien ici que ce problème concerne des opérateurs bornés et que l'on s'intéresse à leur valeur sur tout Φ. D'autre part, la démonstration de ces résutats utilise plusieurs fois une récurrence sur la valeur d'une intégrale stochastique non commutative appliquée à des éléments des différents chaos de Φ. Ces résultats n'auraient pas pu être obtenu sans l'extension des intégrales non commutatives.

Une autre application de cette extension apparaît dans [3]. Dans cet article sont étudiés les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur Φ. Il y est montré que ces opérateurs admettent tous une décomposition chaotique non commutative, i.e. ils sont représentables en une série d'intégrales itérées de la forme

$$\int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \ldots, t_n) I\, dA_{t_1}^{\varepsilon_1} \ldots dA_{t_n}^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{+, \circ, -\}.$$

La convergence de cette série est montrée au sens fort sur un domaine dense de Φ, contenant strictement $\mathcal{E}_{lb}$. Elle est montrée au sens faible sur un domaine encore plus grand.

Sans l'extension des intégrales stochastiques non commutatives, nous n'aurions pu avoir que des convergences au sens faible et sur $\mathcal{E}_{lb}$ seulement.

Extension du calcul stochastique classique

La dernière application que nous présentons ici traite des liens entre le calcul stochastique non commutatif et le calcul stochastique classique. Plus exactement du premier en tant que généralisation du second.

Il est déjà connu que l'opérateur T_t de multiplication par l'intégrale stochastique $\int_0^t h_s\, dw_s$, pour un processus prévisible $(h_t)_{t\geq 0}$, est représentable en intégrales stochastiques non commutatives sous la forme

$$T_t = \int_0^t H_s\, dA_s^- + \int_0^t H_s\, dA_s^+,$$

où H_s est l'opérateur de multiplication par h_s, $s \in \mathbb{R}^+$. Nous allons voir ici que d'autres opérateurs fondamentaux du calcul stochastique classique peuvent être représentés en intégrales stochastiques non commutatives. Cette représentation a l'avantage de montrer le rôle classique joué par chacune des intégrales $\int_0^t H_s^\varepsilon\, dA_s^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, \circ, -, \ \}$, dans certains cas particuliers. Cela donne une intuition probabiliste de l'action qu'une intégrale $\int_0^t H_s^\varepsilon\, dA_s^\varepsilon$ est censée généraliser.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(h_t)_{t\geq 0}$ un processus prévisible borné, soit $(n_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale dont le terme à variation bornée est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est à dire

$$n_t = c + \int_0^t \dot{n}_s\, dw_s + \int_0^t p_s\, ds, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Soit $(m_t)_{t\geq 0}$ une martingale de représentation prévisible $m_t = c' + \int_0^t \dot{m}_s\, dw_s$ et telle que (presque) chacune des variables aléatoires $\dot{m}_s$ soit bornée.

Soit Φ_b le sous-espace des variables aléatoires de Φ qui sont bornées. Sous les conditions posées ci-dessus, on peut définir sur Φ_b, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, les quatre opérateurs fondamentaux suivants :

$$\begin{array}{lcccl} E^\lambda & : & x & \longmapsto & \lambda \mathbb{E}[x] \\ I_h^t & : & x & \longmapsto & \int_0^t h_s\, dx_s \\ J_t^n & : & x & \longmapsto & \int_0^t x_s\, dn_s \\ C_t^m & : & x & \longmapsto & \langle x\, , m \rangle_t, \end{array}$$

où $\langle x\, , m \rangle_t$ désigne le crochet de x et de m.

Soit H_t l'opérateur de multiplication par h_t, $\dot{N}_t$ l'opérateur de multiplication par $\dot{n}_t$, P_t l'opérateur de multiplication par p_t et $\dot{M}_t$ l'opérateur de multiplication par $\dot{m}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 6 – *L'opérateur adapté $T_t = E^\lambda + I_h^t + J_t^n + C_t^m$, défini sur $\Phi_b \cap \Phi_{t]}$, est représentable en intégrales stochastiques non commutatives sur tout Φ_b, avec*

$$T_t = \lambda I + \int_0^t (H_s - T_s)\, dA_s^\circ + \int_0^t \dot{N}_s\, dA_s^+ + \int_0^t P_s\, ds + \int_0^t \dot{M}_s\, dA_s^-.$$

Démonstration

Si $T_t = E^\lambda + I_h^t + J_t^n + C_t^m$, alors, pour tout $x \in \Phi_b$,

$$\begin{aligned}
T_t x_t &= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t h_s\, dx_s + \int_0^t x_s\, dn_s + \langle x\,,\, m\rangle_t \\
&= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t h_s \dot{x}_s\, dw_s + \int_0^t x_s \dot{n}_s\, dw_s + \int_0^t x_s p_s\, ds + \int_0^t \dot{x}_s \dot{m}_s\, ds \\
&= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t H_s \dot{x}_s\, dw_s + \int_0^t \dot{N}_s x_s\, dw_s + \int_0^t P_s x_s\, ds + \int_0^t \dot{M}_s \dot{x}_s\, ds \\
&= \lambda \mathbb{E}[x] + \int_0^t T_s \dot{x}_s\, dw_s + \int_0^t (H_s - T_s)\dot{x}_s\, dw_s + \int_0^t \dot{N}_s x_s\, dw_s + \\
&\qquad + \int_0^t P_s x_s\, ds + \int_0^t \dot{M}_s \dot{x}_s\, ds.
\end{aligned}$$

Ce qui, d'aprés la définition (4) de l'extension des intégrales stochastiques non commutatives, veut exactement dire que

$$T_t = \lambda I + \int_0^t (H_s - T_s)\, dA_s^\circ + \int_0^t \dot{N}_s\, dA_s^+ + \int_0^t P_s\, ds + \int_0^t \dot{M}_s\, dA_s^-. \qquad \blacksquare$$

Références

[1] ATTAL (S.) : "Représentation des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales", prépublication.

[2] ATTAL (S.) : "Problèmes d'unicité dans les représentations d'opérateurs sur l'espace de Fock" *Séminaire de probabilités XXVI*, Springer Verlag, p. 619-632, 1993.

[3] ATTAL (S.) : "Non-commutative chaotic expansion of Hilbert-Schmidt operators on Fock space ", prépublication.

[4] HUDSON (R.L.) & PARTHASARATHY (K.R.) : "Quantum Itô's formula and stochastic evolutions", *Comm. Math. Phys.* 93, p 301-323, 1984.

[5] MEYER (P.A.) : "Quelques remarques au sujet du calcul stochastique sur l'espace de Fock", *Séminaire de Probabilités XX*, Springer Verlag, p. 321-330, 1986.

[6] MEYER (P.A.) : "Eléments de probabilités quantiques", *Séminaire de Probabilités XX*, Springer Verlag, p 186-312, 1986.

[7] MEYER (P.A.) : "Quantum probability for probabilists", L.N.M. 1538, Springer (1993).