Mon plus beau théorème,
ma fille Loïse.

A mon co-auteur, Mona.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux aux trois rapporteurs : P.-A. Meyer, K.R. Parthasarathy et J.L. Sauvageot qui ont eu la patience de lire mes travaux et surtout le mérite d'en avoir tiré quelque chose de positif. Mes pensées vont plus particulièrement vers K.R. Parthasarathy qui, du fait de l'éloignement géographique, ne peut pas participer à la soutenance.

A. Bernard, J. Brossard, Y. Colin de Verdière et M. Émery ont accepté de participer au jury de soutenance, qu'ils en soient remerciés.

Le travail que je présente ici a commencé à Strasbourg il y a 6 ans, il a été le fruit de nombreuses collaborations et discussions. Il m'est difficile de citer toutes les personnes qui y ont contribué, mais je voudrais qu'elles sachent que je mesure parfaitement ce que je leur dois.

Mais pour faire de la recherche, il faut d'abord en avoir envie. C'est aux enseignements de A. Bernard et Y. Colin de Verdière, lorsque j'étais étudiant à Grenoble, que je dois mon goût pour les mathématiques et pour la recherche.

Sommaire

Introduction

Les probabilités quantiques sont issues du formalisme hilbertien des postulats de la mécanique quantique (cf par exemple [vNe]). Elles sont depuis devenues une discipline mathématique à part entière qui s'est avérée féconde bien au-delà des applications à la physique théorique. Les applications mathématiques principales se situent dans les domaines de l'analyse fonctionnelle (algèbres d'opérateurs), de la théorie des groupes et de la théorie des probabilités.

Le calcul stochastique quantique a été formalisé mathématiquement par Hudson et Parthasarathy ([H-P]). Il sert en physique de modèle aux "bruits quantiques" : un système quantique est couplé à un réservoir de chaleur provenant aussi d'un phénomène quantique ; l'hamiltonien du système de départ est alors "bruité" par des bruits à valeurs opérateurs. Le cadre naturel pour l'étude du calcul stochastique quantique est l'espace de Fock symétrique sur $L^2(I\!R^+)$. La propriété de représentation chaotique de certains processus stochastiques fondamentaux (le mouvement brownien, le processus de Poisson, les martingales d'Azéma, ...) permet d'utiliser le calcul stochastique quantique comme extension et unification du calcul stochastique usuel.

La démarche que nous adoptons ici est d'aborder le calcul stochastique quantique avec un point de vue de probabiliste classique ; elle est aussi d'étudier certains problèmes de probabilités classiques avec les outils du calcul stochastique quantique. Cette démarche, aussi surprenant que cela puisse paraître, est relativement peu partagée dans la communauté des probabilistes quantiques (qui proviennent en général d'autres horizons comme la physique, l'analyse fonctionnelle, ...) ; de même les probabilités quantiques n'ont, pour le moment, que peu de succés dans la communauté probabiliste. Ce que nous espérons montrer ici c'est que l'intéraction de ces deux domaines est riche d'idées nouvelles et de résultats intéressants, tant pour la partie quantique que classique.

Ce texte est divisé en trois parties. La première traite du calcul stochastique quantique. On y définit une extension des intégrales stochastiques quantiques qui permet d'atteindre leur domaine maximal. Nous identifions une algèbre de semimartingales quantiques qui autorise le développement d'un vrai calcul d'Ito quantique et d'une théorie des crochets droit et oblique quantiques. Nous étudions ensuite les opérateurs à noyau dans l'espace de Fock. Nous identifions ces noyaux à des décompositions chaotiques quantiques d'opérateurs. Par analogie avec les probabilités classiques, nous présentons une procédure itérative qui permet de trouver le noyau de certains opérateurs, en particulier les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur l'espace de Fock. Nous présentons aussi des domaines élargis pour l'application de ces noyaux.

La deuxième partie est consacrée aux temps d'arrêts quantiques. Nous montrons que la théorie des quasimartingales hilbertiennes d'Enchev joue un rôle essentiel pour définir l'arrêt des processus de vecteurs et d'opérateurs. Une des principales applications est la définition des processus quantiques ayant la propriété forte de Markov. Enfin, nous définissons la notion de temps d'arrêts prévisibles sur l'espace de Fock et nous montrons que l'espace de Fock est quasi-continu à gauche.

La dernière partie est consacrée aux applications du calcul stochastique quantique pour le calcul stochastique usuel. Nous décrivons le calcul stochastique quantique comme une extension et une unification de diverses situations probabilistes. Nous montrons l'utilité du point de vue quantique dans l'étude des endomorphismes de l'espace de Wiener.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il me faut préciser deux points.

Quand on étudie le calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock, on hésite toujours sur la multiplicité de l'espace en question. Doit-on viser la simplicité des notations et travailler sur l'espace de Fock simple $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}))$? Ou doit-on viser la plus grande généralité et travailler sur l'espace de Fock de multiplicité dénombrable $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^{\mathbb{N}}))$? Du point de vue conceptuel il y a peu de différence entre les deux contextes, du point de vue de la légèreté des notations il y en a beaucoup ! Bien que la plupart des résultats présentés ici aient été démontrés dans le cadre le plus général, j'ai choisi de ne les présenter ici que dans le cadre de la multiplicité 1.

Dans cet exposé nous jonglerons avec pas moins de quatre définitions des intégrales stochastiques quantiques. Afin de les situer sans difficulté, j'y fait référence par les noms ou les initiales de leurs auteurs, dont parfois le mien. Je tiens à préciser qu'il ne s'agit là ni d'un manque de modestie de ma part, ni de l'intention de faire croire que ces appelations sont passées dans le language courant ; il s'agit seulement pour moi d'une façon pratique de situer ce dont on parle.

Notations

Nous donnons ici les notations et conventions qui sont communes à toutes les parties.

Tous les espaces vectoriels sont sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Sauf s'il y a risque de confusion, la norme et le produit scalaire d'un espace de Hilbert sont notés $||\cdot||$ et $< \cdot \, , \, \cdot >$ respectivement, sans spécifier l'espace auquel on se réfère. Le produit scalaire $(x, y) \mapsto < x \, , \, y >$ est linéaire en y et antilinéaire en x.

On note Φ l'espace de Fock symétrique (ou bosonique) sur $L^2(\mathbb{R}^+)$, c'est à dire

$$\Phi = \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+)) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}^+)^{\odot n}$$

où $\odot$ symbolise les produits tensoriels symétriques. Ainsi, les élements de Φ sont de la forme $f = \sum_n f_n$ où f_0 est un scalaire, où, pour $n \geq 1$, f_n est une fonction symétrique de carré intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^n$ et où

$$||f||_\Phi^2 = \sum_n ||f_n||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)^{\odot n}};$$

la norme symétrique sur $L^2(\mathbb{R}^+)^{\odot n}$ étant, par convention, prise égale à $n!$ fois la norme tensorielle.

Pour tous $s \leq t$ dans $\mathbb{R}^+$ on note $\Phi_{t]} = \Gamma(L^2([0, t]))$, $\Phi_{[s,t]} = \Gamma(L^2([s, t]))$ et $\Phi_{[t} = \Gamma(L^2([t, +\infty[))$.

Il existe une autre description, très pratique, de l'espace de Fock : l'*espace symétrique de Guichardet*. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^+$ (nous prendrons l'habitude de noter les éléments de $\mathcal{P}$ avec l'alphabet grec minuscule $\sigma, \tau, \omega, \ldots$). Ainsi $\mathcal{P}$ est la réunion disjointe des ensembles $\mathcal{P}_n$ où $\mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$ et où, pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des sous-ensembles à n-éléments de $\mathbb{R}^+$. Pour $n \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{P}_n$ peut être identifié au simplexe croissant $\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n ;\, 0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ et hériter ainsi de la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. En assignant la mesure unité au point $\emptyset \in \mathcal{P}_0$, on obtient finalement une mesure σ-finie sur $\mathcal{P}$ appelée *mesure symétrique* sur $\mathbb{R}^+$ ([Gui]). L'élément de volume de cette mesure est noté $d\sigma, d\tau, d\omega, \ldots$ Les éléments de $L^2(\mathcal{P})$ sont donc les fonctions $f : \sigma \mapsto f(\sigma)$ telles que $\int_{\mathcal{P}} |f(\sigma)|^2 \, d\sigma < \infty$.

L'isomorphisme unitaire entre Φ et $L^2(\mathcal{P})$ est clair si on définit

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n!} f(\sigma)$$

quand $\sigma = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

Dorénavant, nous ne ferons plus de distinction entre l'espace de Fock Φ et l'espace $L^2(\mathcal{P})$. Pour un $f \in \Phi$, la famille de scalaires $\{f(\sigma); \sigma \in \mathcal{P}\}$ est appelée *développement chaotique* de f.

Nous aurons besoin de quelques autres notations sur l'espace de Guichardet. Pour $t \in I\!R^+$ on note $\mathcal{P}_{t]}$ l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{P}$ tels que $\sigma \subset [0,t]$, on note $\mathcal{P}_{[t}$ l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{P}$ tels que $\sigma \subset [t,\infty[$. Pour $\sigma \in \mathcal{P}$ et $t \in I\!R^+$ on écrit $\sigma \cup t$ à la place de $\sigma \cup \{t\}$; de même $\sigma \setminus t$ est l'ensemble $\sigma \setminus \{t\}$. Si $\sigma \neq \emptyset$ alors $\vee\sigma$ est l'élément $\max \sigma$ et σ_- est l'ensemble $\sigma \setminus \vee\sigma$. Pour $s \leq t$ et $\sigma \in \mathcal{P}$ on pose $\sigma_{t)} = \sigma \cap [0,t[$, $\sigma_{(s,t)} = \sigma \cap]s,t[$ et $\sigma_{(t} = \sigma \cap]t,+\infty[$. Enfin, pour $\sigma \in \mathcal{P}$, $\#\sigma$ symbolise le cardinal de l'ensemble σ.

Il est facile de vérifier que, pour tout $t \in I\!R^+$, l'application

$$
\begin{array}{rccc}
U & : \Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t} & \longrightarrow & \Phi \\
 & f \otimes g & \longmapsto & \Big(\sigma \mapsto f(\sigma_{t)})\, g(\sigma_{(t)})\Big)
\end{array}
$$

s'étend en un isomorphisme unitaire entre $\Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$ et Φ. Dans la suite nous ommétons l'application U, et ne ne faisons pas de distiction entre les espaces $\Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$ et Φ ; nous identifions aussi $\Phi_{t]}$ et $\Phi_{[t}$ à des sous-espaces de Φ.

De la même façon, pour tous $s \leq t$, les espaces $\Phi_{s]} \otimes \Phi_{[s,t]} \otimes \Phi_{[t}$ et Φ sont isomorphes. On parle dans ce contexte de structure de *produit tensoriel continu* de l'espace de Fock.

Une famille particulière de sous-espaces de Φ est de grande importance : les espaces de *vecteurs cohérents*. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace dense de $L^2(I\!R^+)$. On dit qu'il est *admissible* s'il est stable par multiplication par $1\!\!1_{[0,t]}$ pour tout t. Pour un vecteur u dans un espace admissible $\mathcal{M}$ on définit le vecteur cohérent associé $\varepsilon(u) \in \Phi$ par $\varepsilon(u)(\sigma) = \prod_{s\in\sigma} u(s)$ où, comme d'habitude, le produit vide est pris égal à 1. De cette façon on obtient un élément de l'espace de Fock tel que $||\varepsilon(u)||^2 = \exp(||u||^2)$. On peut aussi vérifier que dans la structure de produit tensoriel continu $\Phi = \Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$ on a $\varepsilon(u) = \varepsilon(u_{t]}) \otimes \varepsilon(u_{[t})$, où $u_{t]} = u 1\!\!1_{[0,t]}$ et $u_{[t} = u 1\!\!1_{[t,+\infty[}$. L'espace vectoriel engendré par les $\varepsilon(u)$ pour u parcourant $\mathcal{M}$ est noté $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, c'est un sous-espace dense de Φ. Quand $\mathcal{M} = L^2(I\!R^+)$, l'espace $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ est noté $\mathcal{E}$; quand $\mathcal{M} = L^2_{lb}(I\!R^+)$, l'espace des fonctions localement bornées de carré intégrable sur $I\!R^+$, alors $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ est noté $\mathcal{E}_{lb}$.

Cette propriété particulière qu'ont les vecteurs cohérents d'être homogènes par rapport aux décompositions de l'espace de Fock en produit tensoriel continu, est la clé de la définition de Hudson-Parthasarthy des intégrales stochastiques quantiques ([H-P]). Pour un $t \in I\!R^+$ fixé, un opérateur H de Φ dans Φ est dit *t-adapté* si $\mathrm{Dom}\, H$ contient $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ et s'il satisfait, pour tout $u \in \mathcal{M}$:

i) $H\varepsilon(u_{t]})$ appartient à $\Phi_{t]}$

ii) $H\varepsilon(u) = [H\varepsilon(u_{t]})] \otimes \varepsilon(u_{[t})$.

Un *processus adapté* d'opérateurs est une famille $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs de Φ dans Φ telle que H_t est t-adapté pour tout t et telle que l'application $t \mapsto H_t\, \varepsilon(u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathcal{M}$.

Rappellons maintenant les définitions de Hudson-Parthasarathy pour les intégrales stochastiques quantiques. Considérons quatre processus adaptés d'opérateurs H, K, L et M sur Φ, définis sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Dans [H-P] (combiné à [A-M] pour une petite extension des conditions d'intégrabilité) il est prouvé que si, pour tout $u \in \mathcal{M}$, tout $t \geq 0$ on a

$$\int_0^t |u(s)|^2 ||H_s\,\varepsilon(u_{s]})||^2\,ds + \int_0^t ||K_s\,\varepsilon(u_{s]})||^2\,ds + \int_0^t |u(s)|\,||L_s\,\varepsilon(u_{s]})||\,ds \\ + \int_0^t ||M_s\,\varepsilon(u_{s]})||\,ds < \infty$$

alors il existe un unique processus adapté d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$, noté

$$T_t = \int_0^t H_s\,d\Lambda_s + \int_0^t K_s\,dA_s^\dagger + \int_0^t L_s\,dA_s + \int_0^t M_s\,ds$$

satisfaisant

$$< \varepsilon(v)\,,\, T_t\,\varepsilon(u) > = \int_0^t \overline{v}(s)u(s) < \varepsilon(v)\,,\, H_s\,\varepsilon(u) > + \overline{v}(s) < \varepsilon(v)\,,\, K_s\,\varepsilon(u) > \\ + u(s) < \varepsilon(v)\,,\, L_s\,\varepsilon(u) > + < \varepsilon(v)\,,\, M_s\,\varepsilon(u) > ds$$

pour tout $u, v \in \mathcal{M}$, tout $t \geq 0$. Ces intégrales sont les intégrales stochastiques quantiques des processus H, K, L, M par rapport aux "bruits quantiques" $(\Lambda_t)_{t\geq 0}, (A_t^\dagger)_{t\geq 0}, (A_t)_{t\geq 0}$ et par rapport au temps $(tI)_{t\geq 0}$. Ces intégrateurs sont appelées respectivement les processus de *conservation*, *création*, *annihilation* et de *temps*. La définition initiale du processus Λ_t (*resp.* $A_t^\dagger, A_t$ et tI) se retrouve en prenant H_s (*resp.* K_s, L_s, M_s) égal à I pour $s \leq t$, nul pour $s > t$ et les trois autres processus nuls. Pour plus de détails sur le calcul stochastique quantique de Hudson-Parthasarathy on consultera l'article original [H-P], les livres [Me1], [Par], ou le cours [Bia].

Première partie :
CALCUL STOCHASTIQUE QUANTIQUE

I. Une définition maximale des intégrales stochastiques quantiques

I.1 Problèmes d'unicité

Dans [At1] il est montré que les conditions d'Hudson-Parthasarathy telles que présentées dans la section “Notations” ne sont pas suffisantes pour assurer l'unicité de l'écriture d'un opérateur comme somme d'intégrales stochastiques :

$$T = \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s + \int_0^\infty K_s \, dA_s^\dagger + \int_0^\infty L_s \, dA_s.$$

En effet, il est possible de construire un processus adapté *non nul* $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs sur Φ tel que l'opérateur $\int_0^t H_s \, d\Lambda_s$ (par exemple) soit bien défini au sens Hudson-Parthasarathy et soit l'opérateur nul pour tout t. La construction de ce contre-exemple, qui ne mérite pas d'être développée ici, est basée sur le fait que les vecteurs cohérents sont libres entre eux et que l'on peut définir des opérateurs très irréguliers sur l'espace de Fock en définissant leur action indépendamment sur chaque vecteur cohérent.

Pour palier à ce problème de non unicité il suffit d'imposer un peu de régularité sur les coefficients des intégrales stochastiques quantiques.

Théorème I.1 – *Soit T un opérateur sur Φ admettant une représentation intégrale sur $\mathcal{E}$*

$$T = \int_0^\infty H_s \, d\Lambda_s + \int_0^\infty K_s \, dA_s^\dagger + \int_0^\infty L_s \, dA_s$$

où, pour presque tout s, les opérateurs H_s, K_s, L_s sont fermables. Alors T est nul si et seulement si les processus $(H_t)_{t\geq 0}, (K_t)_{t\geq 0}, (L_t)_{t\geq 0}$ sont nuls.

Dorénavant nous considérons que tous les opérateurs avec lesquels nous travaillons sont fermables.

I.2 Calcul différentiel et intégral sur l'espace de Fock

Dans cette section nous présentons un calcul différentiel et intégral intrinsèque sur l'espace de Fock. Certains éléments de ce calcul sont déjà bien connu : les opérateurs gradient, divergence ([Bel], [Lin]), et même dans une certaine mesure l'intégrale d'Ito abstraite ([Ma1]) ; d'autres sont nouveaux : le gradient adapté, la propriété de représentation prévisible, etc ... Nous apportons ici un regard nouveau et unifié sur ces opérateurs et ils seront la clé du développement du calcul stochastique quantique que nous expliquerons dans les sections suivantes. La présentation qui suit emprunte à [A-M], [AL2] et [At9].

Pour tout $f \in \Phi$, tout $t \in I\!R^+$ et tout $\sigma \in \mathcal{P}$ on définit

$$[P_t f](\sigma) = 1\!\!1_{\Gamma_{t]}}(\sigma) f(\sigma).$$

L'application $\sigma \mapsto [P_t f](\sigma)$ est clairement de carré intégrable et $P_t f$ définit un nouvel élément de Φ. Il est facile de voir que P_t est en fait le projecteur orthogonal de Φ sur $\Phi_{t]}$.

Pour tout f in Φ, tout t dans $I\!R^+$et tout $\sigma \in \mathcal{P}$ on définit

$$[\nabla_t f](\sigma) = f(\sigma \cup t).$$

Pour que cette application soit de carré intégrable en σ il faut que f soit dans un certain sous-domaine propre de Φ. Il existe un domaine commun naturel et utile pour tous les opérateurs ∇_t, il s'agit de

$$\mathrm{Dom}\, \sqrt{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Phi;\ \int_{\mathcal{P}} \#\sigma |f(\sigma)|^2 \, d\sigma < \infty\}.$$

Les opérateurs ∇_t sont souvent nommés *gradients de Malliavin* .

Pour tous $t \in I\!R^+$, $f \in \Phi$, $\sigma \in \mathcal{P}$ on définit la quantité

$$[D_t f](\sigma) = 1\!\!1_{\mathcal{P}_{t]}}(\sigma) f(\sigma \cup t).$$

Cette application est de carré intégrable en σ pour tout f et pour presque tout t ([AL2]). Donc pour tout $f \in \Phi$, presque tout t, $D_t f$ est un élément bien défini de Φ.

On voit par définition que D_t est égal à $P_t \nabla_t$ sur le domaine de ∇_t, mais la différence avec ∇_t réside dans le fait que les D_t sont *définis partout* sur Φ. Cette différence entre les domaines de D_t et ∇_t va jouer un rôle crucial dans les sections suivantes. Dans la suite, nous prendrons assez peu de précautions dans l'utilisation des “opérateurs” D_t (notament avec les “presque surement”) ; toutes les libertés que nous prenons peuvent se justifier aisement.

Soit $x_. = (x_t)_{t \geq 0}$ un *processus de vecteurs* dans Φ, c'est à dire une application mesurable $(\sigma, t) \mapsto x(\sigma, t)$ sur $\mathcal{P} \times I\!R^+$ telle que pour tout t l'application $\sigma \mapsto x_t(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} x(\sigma, t)$ soit de carré intégrable.

Pour un tel processus on définit

$$[\mathcal{S}(x_.)](\sigma) = \sum_{s \in \sigma} x_s(\sigma \setminus s)$$

où, comme d'habitude, la somme vide vaut 0. Quand cette application est de carré intégrable en σ on dit que $(x_t)_{t \geq 0}$ est *Skorohod intégrable* et le vecteur de l'espace de Fock ainsi défini $\mathcal{S}(x_.)$ est appelé *l'intégrale de Skorohod* de $(x_t)_{t \geq 0}$.

Soit $x. = (x_t)_{t\geq 0}$ un processus de vecteurs dans Φ. On dit que $x.$ est *Ito intégrable* si

i) $x_t \in \Phi_{t]}$ pour tout t,

ii) $\int_0^\infty ||x_t||^2 \, dt < \infty$.

Si $x.$ est un processus Ito intégrable sur Φ, on définit sur $\mathcal{P}$ l'application

$$[I(x.)](\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \emptyset, \\ x_{\vee\sigma}(\sigma-) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous les conditions imposées à $(g_t)_{t\geq 0}$, cette application est de carré intégrable en σ et on a

$$\int_{\mathcal{P}} \left|[I(x.)](\sigma)\right|^2 d\sigma = \int_0^\infty ||x_t||^2 \, dt.$$

Pour tout processus Ito intégrable $(x_t)_{t\geq 0}$, l'application $I(x.)$ définit donc un élément de Φ, appelé *l'intégrale d'Ito* de $(x_t)_{t\geq 0}$ et satisfaisant la *formule d'isométrie*

$$\left|\left|I(x.)\right|\right|^2 = \int_0^\infty ||x_t||^2 \, dt.$$

Nous montrons dans [At9] que l'opérateur d'intégrale d'Ito sur l'espace de Fock correspond vraiment à une intégration par rapport à la courbe $(\chi_t)_{t\geq 0}$ dans Φ définie par

$$\begin{cases} \chi_t(\sigma) = 0 & \text{si } \#\sigma \neq 1, \\ \chi_t(\{s\}) = \mathbb{1}_{[0,t]}(s). \end{cases}$$

Désormais l'intégrale d'Ito $I(y.)$ sera noté $\int_0^\infty y_t \, d\chi_t$.

Si l'on revient aux opérateurs D_t, on voit facilement que pour tout $f \in \Phi$ le processus de vecteurs $(D_t f)_{t\geq 0}$ est Ito intégrable. Si on calcule $\int_0^\infty D_t f \, d\chi_t$, on obtient

$$\left[\int_0^\infty D_t f \, d\chi_t\right](\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \emptyset \\ f(\sigma) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, en notant que $[P_0 f](\sigma) = \mathbb{1}_{\sigma=\emptyset} f(\emptyset)$ ($P_0 f$ peut donc être identifié à un nombre complexe) on conclut facilement à la propriété suivante.

Théorème I.2 (Propriété de représentation prévisible sur l'espace de Fock) – *Pour tout $f \in \Phi$ on a la représentation*

$$f = P_0 f + \int_0^\infty D_t f \, d\chi_t,$$

avec

$$||f||^2 = |P_0 f|^2 + \int_0^\infty ||D_t f||^2 \, dt$$

et pour tout $g \in \Phi$

$$< f \, , \, g > = \overline{P_0 f} \, P_0 g + \int_0^\infty < D_t f \, , \, D_t \, g > dt.$$

I.3 Définitions comparées des intégrales stochastiques quantiques

Dans la section "Notations" nous avons résumé les définitions des intégrales stochastiques quantiques sur les domaines de vecteurs cohérents, telles qu'introduites par Hudson et Parthasarathy. L'avantage de leur définition, au delà du mérite d'être la première, est qu'elle est explicite au sens où, si on se donne un processus adapté d'opérateurs $(H_t)_{t\geq 0}$, on sait décrire l'opérateur $T = \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s$ (par exemple). Il y a deux inconvénients à cette définition. Le premier est que l'action des intégrales stochastiques quantiques n'est en fait pas vraiment explicite puisque elle est donnée via la forme bilinéaire $< \varepsilon(u)\, ,\, T\varepsilon(v) >$ qu'elle définie. On ne dispose donc pas de formule explicite décrivant l'action de T sur un $\varepsilon(v)$. Mais le principal inconvénient de ces définitions est qu'elles sont arbitrairement restreintes au domaine des vecteurs cohérents. S'il se trouve, par exemple, que les opérateurs H_t sont bornés et que $T = \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s$ le soit aussi, on ne sait pas déduire l'action de T sur un vecteur f quelconque de Φ autrement que par un argument de fermeture. En particulier ces intégrales stochastiques quantiques ne peuvent pas être composées. La formule d'Ito quantique obtenue dans [H-P] est mise sous une forme faible : toutes les compositions d'opérateurs HK sont remplacées par des $< H^*\varepsilon(v)\, ,\, K\varepsilon(u) >$.

Je vais maintenant décrire deux extensions des définitions de Hudson-Parthasarathy qui ont l'avantage de résoudre certains de ces inconvénients, sans les résoudre tous.

Dans [Bel] et [Lin], Belavkin et Lindsay ont indépendamment défini les intégrales stochastiques quantiques hors du domaine des vecteurs cohérent à l'aide du calcul anticipatif sur l'espace de Fock (gradient ∇ et intégrale de Skorohod $\mathcal{S}$). Rappellons brièvement leurs définitions.

Pour un processus adapté (ou non) d'opérateurs $(H_t)_{t\geq 0}$ on définit les domaines

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}_{BL}\, \Lambda(H) = \{f \in \mathcal{F}; f \in \mathrm{Dom}\sqrt{N},\ \nabla_s f \in \mathrm{Dom}\, H_s \text{ pour tout } s \text{ et}\\
s \mapsto H_s \nabla_s f \text{ est Skorohod intégrable}\}\\
\mathrm{Dom}_{BL}\, A^\dagger(H) = \{f \in \mathcal{F}; f \in \mathrm{Dom}\, H_s \text{ pour tout } s \text{ et}\\
s \mapsto H_s f \text{ est Skorohod intégrable}\}\\
\mathrm{Dom}_{BL}\, A(H) = \{f \in \mathcal{F}; f \in \mathrm{Dom}\sqrt{N},\ \nabla_s f \in \mathrm{Dom}\, H_s \text{ pour tout } s \text{ et}\\
\int_0^\infty ||H_s \nabla_s f||\, ds < \infty\}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Dom}_{BL}\, T(H) = \{f \in \mathcal{F}; f \in \mathrm{Dom}\, H_s \text{ pour tout } s \text{ et } \int_0^\infty ||H_s f||\, ds < \infty\}.$$

L'intégrale stochastique quantique $\int_0^\infty H_s\,d\Lambda_s$ est définie comme étant l'opérateur dont le domaine est $\mathrm{Dom}_{BL}\,\Lambda(H)$ et la valeur est

$$\int_0^\infty H_s\,d\Lambda_s\,f = \mathcal{S}(H.\nabla.f).$$

De même, $\int_0^\infty H_s\,dA_s^\dagger$ est définie comme étant l'opérateur dont le domaine est $\mathrm{Dom}_{BL}\,A^\dagger(H)$ et la valeur est

$$\int_0^\infty H_s\,dA_s^\dagger\,f = \mathcal{S}(H.f),$$

l'intégrale $\int_0^\infty H_s\,dA_s$ est définie comme étant l'opérateur dont le domaine est $\mathrm{Dom}_{BL}\,A(H)$ et la valeur est

$$\int_0^\infty H_s\,dA_s\,f = \int_0^\infty H_s\nabla_s f\,ds$$

et enfin, l'intégrale $\int_0^\infty H_s\,ds$ est définie comme étant l'opérateur dont le domaine est $\mathrm{Dom}_{BL}\,T(H)$ et la valeur est

$$\int_0^\infty H_s\,ds\,f = \int_0^\infty H_s f\,ds.$$

Ces définitions sont des extensions de celles de Hudson et Parthasarathy, au sens où, sur les domaines de vecteurs cohérents, les deux familles de définitions coïncident. L'avantage de la définition de Belavkin-Lindsay est qu'elle va au delà de ces domaines. L'autre avantage de cette définition est qu'elle est totalement explicite : si on se donne un processus adapté d'opérateurs $(H_t)_{t\geq 0}$, on sait parfaitement comment agit l'opérateur $\int_0^\infty H_s\,d\Lambda_s$ et sur quel domaine.

Il y a par contre, à mon avis, 2 inconvénients dans cette définition : il y a encore une limitation arbitraire du domaine des intégrales stochastiques quantiques (le domaine de ∇ dans les cas de la création et de la conservation) qui ne tient pas à la régularité des opérateurs mis en jeu ; l'autre inconvénient est l'utilisation du calcul que je nommerai *anticipatif* sur l'espace de Fock (intégrale de Skorohod, Gradient de Malliavin,...), ce calcul n'est pas toujours très aisé surtout lorsqu'il s'agit d'utiliser les formules d'isométries.

Nous allons maintenant voir les définitions des intégrales stochastiques quantiques telles que données dans [A-M]. L'extension que nous y proposons supprime deux inconvénients des définitions précédentes : il n'y a plus de limitations arbitraires de domaines, les intégrales quantiques peuvent être définies sur leur domaine maximal (qui peut parfois être tout l'espace de Fock, autorisant ainsi la *composition* de ces intégrales, voir section II) ; nous utilisons de plus le calcul *adapté* sur l'espace de Fock (intégrale d'Ito, gradient adapté D, ...) ce qui autorise des formules d'isométries agréables.

Par contre, nous héritons d'un nouvel inconvénient majeur : nous perdons le caractère explicite de la définition des intégrales stochastiques quantiques, elles sont décrites via une sorte d'équation différentielle stochastique. Le problème qui s'est posé à nous dans un premier temps est, qu'en toute généralité, nous ne savions pas caractériser les domaines sur lesquels il y a existence et unicité de la solution à l'équation correspondante. Par contre nous avons un *Théorème d'extension* relativement agréable qui permet de travailler dans beaucoup de cas.

La réponse complète à tous ces problèmes d'existence, d'unicité et de domaine des solutions sera donnée par la dernière extension des intégrales stochastiques quantiques (cf I.4–I.7).

Revenons maintenant à l'idée (informelle) de cette nouvelle définition.

En considérant un processus d'intégrales stochastiques quantiques

$$T_t = \int_0^t H_s \, dX_s,$$

où dX_t désigne n'importe lequel des quatre intégrands de base $d\Lambda_t, dA_t^\dagger, dA_t$ ou dt, comme une semimartingales d'opérateurs qui, lorsqu'elle agit sur une martingale de vecteurs $f_t = P_0 f + \int_0^t D_s f \, d\chi_s$, doit vérifier une formule de type Ito

$$d(T_t f_t) = (dT_t) f_t + T_t(df_t) + (dT_t)(df_t),$$

nous obtenons les formules

$$T_t f = \int_0^\infty T_{s\wedge t} \, D_s f \, d\chi_s + \begin{cases} \int_0^t H_s P_s f \, d\chi_s & \text{si } X_s = A_s^\dagger \\ \int_0^t H_s D_s f \, d\chi_s & \text{si } X_s = \Lambda_s \\ \int_0^t H_s D_s f \, ds & \text{si } X_s = A_s \\ \int_0^t H_s P_s f \, ds & \text{si } X_s = sI. \end{cases} \tag{I.1}$$

Dans la suite nous nous référerons à ces équations sous le nom d'*équations A-M*. Ces équations sont à la base de la définition des intégrales stochastiques quantiques donnée dans [A-M]. En effet, nous disons que le processus $(T_t)_{t\geq 0}$ est l'intégrale stochastique quantique $\int_0^t H_s \, dX_s$ *sur le domaine* $\mathcal{D}$ si, pour tout $f \in \mathcal{D}$, l'équation (I.1) *a un sens* (du point de vue des domaines et de l'intégrabilité de chacun de ses termes) et est *vérifiée* (l'égalité entre les deux membres est vérifiée sur $\mathcal{D}$).

Théorème I.3 – *Sur le domaine $\mathcal{E}$ des vecteurs cohérents, cette définition des intégrales stochastiques non commutatives coïncide avec celle de Hudson-Parthasarathy.*

Bien entendu, l'intérêt de cette définition se situe dans le fait qu'elle permet d'aller au-delà du domaine des vecteurs cohérents. Du fait de l'utilisation des gradients adaptés D_t, il n'y a plus de restriction arbitraire du domaine des intégrales stochastiques quantiques, seules les conditions de domaines propres aux coefficients et les conditions d'intégrabilité interviennent. Par contre, il faut savoir sur quels domaines, au delà de $\mathcal{E}$, on peut étendre les intégrales stochastiques non commutatives grâce à cette nouvelle définition. Le *Théorème d'extension* suivant fournit une réponse qui n'est pas la meilleure, mais qui utilise des conditions suffisamment faibles pour pouvoir être utilisée assez couramment.

Théorème I.4 (Théorème d'extension) – *Si* $(T_t)_{t\geq 0}$ *admet une représentation intégrale*

$$T_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s + \int_0^t K_s\, dA_s^\dagger + \int_0^t L_s\, dA_s + \int_0^t M_s\, ds$$

sur $\mathcal{E}$ *et si le processus adjoint* $(T_t^*)_{t\geq 0}$ *admet aussi une représentation intégrale*

$$T_t^* = \int_0^t H_s^*\, d\Lambda_s + \int_0^t L_s^*\, dA_s^\dagger + \int_0^t K_s^*\, dA_s + \int_0^t M_s^*\, ds$$

sur $\mathcal{E}$, *alors les représentations intégrales de* $(T_t)_{t\geq 0}$ *et* $(T_t^*)_{t\geq 0}$ *s'étendent partout où les équations A-M associées ont un sens.*

En conclusion, si $(T_t)_{t\geq 0}$ et son adjoint ont une représentation intégrale au sens usuel sur $\mathcal{E}$, alors *les équations A-M associées sont vérifiées partout où elles sont bien définies.*

Cette définition étendue des intégrales stochastiques quantiques permet dans les bons cas (cf chapitre II) d'avoir des intégrales stochatiques quantiques définies sur *tout* l'espace de Fock, dans ce cas elles sont composables. On peut alors espérer obtenir une formule d'intégration par partie quantique du même type que celle d'Hudson-Parthasarathy, mais pour la composition véritable des opérateurs.

Théorème I.5 – *Soient*

$$T_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s + \int_0^t K_s\, dA_s^\dagger + \int_0^t L_s\, dA_s + \int_0^t M_s\, ds$$

$$\text{et}\ \ T_t' = \int_0^t H_s'\, d\Lambda_s + \int_0^t K_s'\, dA_s^\dagger + \int_0^t L_s'\, dA_s + \int_0^t M_s'\, ds$$

deux processus d'intégrales stochastiques non commutatives définis, au sens étendu, sur tout l'espace de Fock. Alors le processus $(T_tT_t')_{t\geq 0}$ *admet une représentation intégrale étendue sur tout l'espace de Fock*

$$\begin{aligned} T_tT_t' = &\int_0^t (H_sT_s' + T_sH_s' + H_sH_s')\, d\Lambda_s + \int_0^t (K_sT_s' + T_sK_s' + H_sK_s')\, dA_s^\dagger + \\ &+ \int_0^t (L_sT_s' + T_sL_s' + L_sH_s')\, dA_s + \int_0^t (M_sT_s' + T_sM_s' + L_sK_s')\, ds. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant détailler, dans les sections I.4 à I.7, l'extension des intégrales stochastiques quantiques telles que donnée dans [AL2] (et [AL1]). Nous allons voir qu'elle garde tous les avantages des définitions précédentes sans aucun des inconvénients ; nous allons voir qu'elle répond de façon complète au problème d'existence de solutions aux équations A-M ; nous allons voir que cette définition des intégrales stochastiques quantiques est maximale. Avant d'arriver à ces résultats, nous devons revoir le calcul stochastique depuis sa première pierre : la notion d'adaptation. Nous exprimons la notion usuelle d'opérateurs adaptés d'une manière nouvelle qui permet de s'affranchir du domaine des vecteurs cohérents et qui permet de considérer une très large famille d'autres domaines. A partir de cette reformulation, nous pouvons redéfinir les intégrales stochastiques quantiques.

I.4 Une nouvelle notion d'adaptation

Le calcul d'Ito abstrait développé dans la section I.2 constitue l'ingrédient principal de la nouvelle définition d'adaptation pour les opérateurs sur l'espace de Fock Φ. Nous allons momentanément oublier la définition d'adaptation de Hudson-Parthasarathy.

Soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$. Soit $\mathcal{D}$ un domaine dans Φ c'est à dire un sous-espace de Φ. On dit que $\mathcal{D}$ est un domaine *t-adapté* si $f \in \mathcal{D}$ implique $P_t f \in \mathcal{D}$ et $D_u f \in \mathcal{D}$ pour presque tout $u \geq t$.

On peut bien sûr se demander quelles sortes de domaines dans Φ satisfont à ces propriétés de stabilité. Il est facile de voir que tous les domaines que l'on a l'habitude de considérer en calcul stochastique quantique sont adaptés en ce nouveau sens :

- l'espace de Fock tout entier est bien sûr t-adapté pour tout t ;

- les espaces de vecteurs cohérents $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ sont des domaines t-adaptés pour tout t si et seulement si $\mathcal{M}$ est admissible ;

- l'espace, usuellement appelé "espace des particules finies", $\Phi_F \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Phi;$ pour un $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma) = 0$ quand $\#\sigma > n\}$ est t-adapté pour tout t ;

- l'espace des vecteurs-test de Maassen-Meyer, c'est à dire l'ensemble des $f \in \Phi$ tels que

i) $f(\sigma) = 0$ si $\sigma \not\subset [0, T]$ pour un T,
ii) $|f(\sigma)| \leq CM^{\#\sigma}$ pour des $C, M \geq 0$,

est t-adapté pour tout t ;

- les "échelles de Fock" $\Phi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Phi; \int_{\mathcal{P}} a^{\#\sigma}|f(\sigma)|^2\, d\sigma < \infty\}$ pour $a \geq 1$ sont toutes t-adaptée pour tout t.

Ainsi, la classe des domaines adaptés constitue une classe bien plus large que celles des vecteurs cohérents.

Introduisons maintenant la définition d'adaptation pour les opérateurs. Soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$. Soit H un opérateur de Φ dans Φ, de domaine $\mathcal{D}$. L'opérateur H est *t-adapté* si

i) $\mathcal{D}$ est un domaine t-adapté

ii) sur $\mathcal{D}$ on a

$$\begin{cases} P_t H = H P_t \\ D_u H = H D_u & \text{pour presque tout } u \geq t. \end{cases}$$

Il y a d'autres définitions équivalentes de cette nouvelle adaptation. Celle ci-dessus est la plus simple, celle qui suit est la plus utile.

Pour un $\sigma = \{t_1 < \ldots < t_n\} \in \mathcal{P}$, on note D_σ l'opérateur $D_{t_1} \ldots D_{t_n}$ et, pour $\sigma = \emptyset$, l'opérateur D_σ est l'opérateur identité I.

Proposition I.6 – *Soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$. Un opérateur H sur Φ de domaine $\mathcal{D}$ est t-adapté si et seulement si*

i) *$\mathcal{D}$ est un domaine t-adapté,*

ii) *pour tout $f \in \Phi$, presque tout $\sigma \in \mathcal{P}$ on a*

$$[Hf](\sigma) = [HP_t D_{\sigma_{(t}} f](\sigma_{t)}).$$

Cette novelle définition de l'adaptation est une extension de celle de Hudson-Parthasarathy.

Proposition I.7 – *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^+)$. Soit H un opérateur défini sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Alors $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ est un domaine t-adapté pour tout t si et seulement si $\mathcal{M}$ est admissible. L'opérateur H est t-adapté si et seulement si il est t-adapté au sens d'Hudson-Parthasarathy.*

Avec cette notion d'adaptation pour les domaines et les opérateurs, nous avons une notion d'espérance conditionnelle pour les domaines et les opérateurs. Soit $\mathcal{D}$ un domaine quelconque dans Φ. Soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$. Définissons

$$\mathbb{E}_t(\mathcal{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Phi;\ P_t D_\sigma f \in \mathcal{D} \text{ pour p. t. } \sigma \in \mathcal{P}_{[t]}\}.$$

Alors $\mathbb{E}_t(\mathcal{D})$ joue le rôle de l'*espérance conditionnelle* du domaine $\mathcal{D}$ à l'instant t.

Proposition I.8 – *Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et tout domaine $\mathcal{D}$ dans Φ nous avons que*

i) *$\mathbb{E}_t(\mathcal{D})$ est un domaine u-adapté pour tout $u \geq t$;*

ii) *$\mathbb{E}_t(\mathbb{E}_s(\mathcal{D})) = \mathbb{E}_{s\wedge t}(\mathcal{D})$ pour tous s, t ;*

iii) *si $\mathcal{D}$ est un domaine t-adapté alors $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}_t(\mathcal{D})$.*

Soit H un opérateur quelconque sur Φ, de domaine $\operatorname{Dom} H$. On définit l'opérateur $\mathbb{E}_t(H)$ sur Φ dont le domaine est

$$\operatorname{Dom} \mathbb{E}_t(H) = \{f \in \mathbb{E}_t(\operatorname{Dom} H);\ \sigma \mapsto [HP_t D_{\sigma_{(t}} f](\sigma_{t)}) \in L^2(\mathcal{P})\}$$

et dont la valeur sur ce domaine est

$$[\mathbb{E}_t(H)f](\sigma) = [HP_tD_{\sigma_{(t}}f](\sigma_{t)}).$$

Nous donnons maintenant une liste des propriétés principales de cette *espérance conditionnelle d'opérateurs.*

Proposition I.9 – *Pour tout opérateur H sur Φ, tout t dans $\mathbb{R}^+$, on a :*

i) $\mathbb{E}_t(H)$ *est un opérateur u-adapté pour tout $u \geq t$;*

ii) $\mathbb{E}_t(\mathbb{E}_s(H)) = \mathbb{E}_{s\wedge t}(H)$ *pour tous s, t ;*

iii) *H est un opérateur t-adapté si et seulement si* $\mathrm{Dom}\, H$ *est t-adapté et H est une restriction de $\mathbb{E}_t(H)$;*

iv) *si H et $\mathbb{E}_t(H)$ sont densement définis alors $\mathbb{E}_t(H)^*$ est t-adapté et $\mathbb{E}_t(H)^*$ est une extension de $\mathbb{E}_t(H^*)$.*

I.5 Une nouvelle définition des intégrales stochastiques quantiques

La nouvelle définition de l'adaptation, les espérances conditionnelles associées et la propriété d'extension iii) de la Proposition I.9, donnent lieu à une nouvelle définition des intégrales stochastiques quantiques. Il y a de nombreuses manières différentes d'introduire ces nouvelles définitions ; j'en choisi ici une qui est différente de l'approche originale ([AL2]) mais qui est plus constructive (elle a été développée dans [At9]).

A partir des définitions de Hudson-Parthasarathy, ou tout simplement à partir des définitions usuelles des opérateurs de création, annihilation, conservation sur un espace de Fock, on peut écrire des formules explicites décrivant l'action des bruits fondamentaux (processus de création, annihilation, conservation et temps) sur des vecteurs f de leur domaine. Par exemple le processus de création $(A_t^\dagger)_{t\geq 0}$ est donné par

$$[A_t^\dagger f](\sigma) = \sum_{\substack{s\in\sigma \\ s\leq t}} f(\sigma \setminus s) \tag{I.2}$$

et le domaine de $A_t^\dagger$ est exactement l'ensemble des f tels que l'expression ci-dessus est de carré intégrable en σ. De la même façon, l'annihilation, la conservation et le temps sont respectivement donnés par

$$[A_t f](\sigma) = \int_0^t f(\sigma \cup s)\, ds \tag{I.3}$$

$$[\Lambda_t f](\sigma) = \sum_{\substack{s\in\sigma \\ s\leq t}} f(\sigma) \tag{I.4}$$

$$[tIf](\sigma) = \int_0^t f(\sigma)\, ds. \tag{I.5}$$

Il faut noter que les expressions (I.4) et (I.5) peuvent être simplifiée mais il est utile de les conserver sous cette forme.

Soit $(H_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs. Supposons que $(H_t)_{t\geq 0}$ soit *étagé*, c'est à dire qu'il soit constant sur les intervalles d'une partition $\{t_i;\, i\in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^+$. Regardons, par exemple, le cas de l'intégrale d'annihilation. Si l'on veut définir l'intégrale stochastique quantique $\int_0^\infty H_s\,dA_s$ comme dans [H-P] on regarde naturellement les sommes de Riemann $\sum_i H_{t_i}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})$. Il faut noter que les produits $H_{t_i}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})$ ne sont pas des compositions d'opérateurs mais des produits tensoriels d'opérateurs. En effet, notre notion d'adaptation coïncide avec celle de Hudson-Parthasarathy, donc H_{t_i} est de la forme $K\otimes I$ dans le produit tensoriel $\Phi=\Phi_{t_i]}\otimes\Phi_{[t_i}$ et $A_{t_{i+1}}-A_{t_i}$ est de la forme $I\otimes K'$.

On sait de plus que notre espérance conditionnelle étend le domaine des opérateurs adaptés, donc si on veut maximiser le domaine de nos intégrales stochastiques quantiques, nous avons intérêt à considérer plutôt

$$\sum_i \mathbb{E}_{t_i}(H_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i}).$$

On obtient

$$\sum_i [(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})\mathbb{E}_{t_i}(H_{t_i})f](\sigma)=\int_0^\infty [H_sD_sD_{\sigma_{(s}}f](\sigma_{s)})\,ds.$$

Cette dernière expression ne dépend plus du fait que $(H_t)_{t\geq 0}$ est un processus étagé et nous pouvons garder cette expression comme définition de l'intégrale d'annihilation $\int_0^\infty H_s\,dA_s$.

Soyons plus précis. Pour un processus adapté d'opérateurs $(H_t)_{t\geq 0}$, nous définissons la quantité

$$[A(H)f](\sigma)\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^\infty [H_sD_sD_{\sigma_{(s}}f](\sigma_{s)})\,ds. \tag{I.6}$$

Nous définissons l'intégrale d'annihilation de $(H_t)_{t\geq 0}$ comme étant l'opérateur $A(H)$ dont le domaine est l'ensemble des $f\in\Phi$ appartenant à $\cap_s \mathbb{E}_s(\mathrm{Dom}\,H_s)$, tels que $s\mapsto [H_sD_sD_{\sigma_{(s}}f](\sigma_{s)})$ soit Lebesgue intégrable pour p.t. σ et tels que l'expression (I.6) de $[A(H)f](\sigma)$ soit de carré intégrable en σ. La valeur de $A(H)$ sur son domaine est alors donnée par (I.6).

Les intégrales de création, conservation et temps de $(H_t)_{t\geq 0}$ sont définies en suivant la même procédure. On obtient respectivement les expressions

$$[A^\dagger(H)f](\sigma)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{s\in\sigma}[H_sP_sD_{\sigma_{(s}}f](\sigma_{s)})\,ds \tag{I.7}$$

$$[\Lambda(H)f](\sigma)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{s\in\sigma}[H_sD_sD_{\sigma_{(s}}f](\sigma_{s)})\,ds \tag{I.8}$$

$$[T(H)f](\sigma)\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^\infty [H_sP_sD_{\sigma_{(s}}f](\sigma_{s)})\,ds \tag{I.9}$$

avec les définitions naturelles correspondantes pour les domaines.

Ces nouvelles définitions des intégrales stochastiques quantiques, que nous appèlerons *intégrales A-L*, peuvent sembler à première vue relativement compliquées et difficiles à manipuler. Nous allons voir dans la suite que leur principal intérêt est de donner des réponses satisfaisantes aux problèmes posés par les définitions précédentes.

Dans [AL2], un long développement suit ces définitions, afin d'établir les propriétés usuelles de ces intégrales. En particulier on vérifie des propriétés d'adaptation, de martingale (sauf pour celle par rapport au temps), de comportement par passage à l'adjoint. Les résultats obtenus sont ceux attendus ; bien que parfois un peu plus compliqués pour ce qui concerne le passage à l'adjoint, mais c'est certainement le prix à payer pour garder la plus grande généralité possible.

Nous allons aborder le point principal des ces définitions : le fait qu'elles contiennent toutes les précédentes (Hudson-Parthasarathy, Belavkin-Lindsay, Attal-Meyer).

I.6 Extensions des définitions précédentes

Le premier point est que nos définitions étendent celles de Belavkin-Lindsay.

Théorème I.10 – *Soit $(H_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs sur Φ. Alors*

i) $\mathrm{Dom}_{BL}\,\Lambda(H)$ *est inclus dans* $\mathrm{Dom}\,\Lambda(H)$ *et sur le premier domaine on a* $\Lambda(H)f = \mathcal{S}(H.\nabla.f)$;

ii) $\mathrm{Dom}_{BL}\,A^\dagger(H)$ *est inclus dans* $\mathrm{Dom}\,A^\dagger(H)$ *et sur le premier domaine on a* $A^\dagger(H)f = \mathcal{S}(H.f)$;

iii) $\mathrm{Dom}_{BL}\,A(H)$ *est inclus dans* $\mathrm{Dom}\,A(H)$ *et sur le premier domaine on a* $A(H)f = \int_0^\infty H_s\nabla_s f\,ds$;

iv) $\mathrm{Dom}_{BL}\,T(H)$ *est inclus dans* $\mathrm{Dom}\,T(H)$ *et sur le premier domaine on a* $T(H)f = \int_0^\infty H_s f\,ds$.

Comme on sait que les définitions de Belavkin-Lindsay étendent celles de Hudson-Parthasarathy (cf [Lin] ou [Bia]) on obtient le résultat suivant (on peut trouver une preuve directe dans [A-L] Theorem 8.1).

Corollaire I.11 – *Soit $(H_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs définis sur un espace de vecteurs cohérents $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ pour un $\mathcal{M}$ admissible. Alors $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ est inclus dans les domaines de $\Lambda(H), A^\dagger(H), A(H)$ et $T(H)$. Sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, les intégrales stochastiques quantiques $\Lambda(H), A^\dagger(H), A(H)$ et $T(H)$ coïncident avec les intégrales de Hudson-Parthasarathy correspondantes.*

I.7 Résolution des équations A-M

Ainsi donc les définitions A-L des intégrales stochastiques quantiques sont totalement *explicites* du point de vue du domaine et de l'action des opérateurs qu'elles définissent, elles ne présentent *aucune limitation* a priori de domaine, elles étendent les définitions de Hudson-Parthasarathy et de Belavkin-Lindsay. Le résultat le plus satisfaisant que l'on obtient avec ces nouvelles intégrales stochastiques quantiques est la réponse complète qu'elles donnent aux problèmes posés par les équations A-M. En effet, nous allons voir que, contre toute attente (en tout cas au moins la mienne !), les équations A-M admettent *toujours* une solution, qui est *unique*, que l'on est capable d'identifier le domaine *maximal* sur lequel la solution est définie et que cette solution est *forcement* l'intégrale stochastique quantique A-L correspondante. Voici ce que cela donne en termes plus rigoureux.

Pour un processus adapté donné d'opérateurs $(H_t)_{t\geq 0}$ on a les intégrales A-L correspondantes $\Lambda(H), A^\dagger(H), A(H)$ et $T(H)$ avec leur domaine maximal, comme définis dans la section I.5. Il est ici utile de restreindre un peu notre domaine d'étude, bien que ce ne soit pas nécessaire, afin de rendre les énoncés plus agréables. Le domaine restreint de $\Lambda(H)$ (*resp.* $A^\dagger(H)$) est l'intersection de son domaine maximal avec l'ensemble des $f \in \Phi$ satisfaisant $\int_0^\infty ||H_s D_s f||^2\, ds < \infty$ (*resp.* $\int_0^\infty ||H_s P_s f||^2\, ds < \infty$). Le domaine restreint de $A(H)$ (*resp.* $T(H)$) est l'intersection de son domaine maximal avec l'ensemble des $f \in \Phi$ satisfaisant $\int_{\mathcal{P}} \left[\int_0^\infty \big|[H_s D_s f](\sigma)\big|\, ds\right]^2 d\sigma < \infty$ (*resp.* $\int_{\mathcal{P}} \left[\int_0^\infty \big|[H_s P_s f](\sigma)\big|\, ds\right]^2 d\sigma < \infty$).

Avant d'énoncer le théorème principal, il est utile d'aider le lecteur a en comprendre le sens. Si on considère l'équation A-M associée au processus $T_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s$ (par exemple) on a

$$T_t f = \int_0^\infty T_{s\wedge t} D_s f\, d\chi_s + \int_0^t H_s D_s f\, d\chi_s. \qquad (I.10)$$

Nous cherchons les solutions de cette équation. J'entends par là que la donnée est un processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$, avec ses domaines $\mathrm{Dom}\, H_t$ et que l'on cherche tous les processus $(T_t)_{t\geq 0}$ qui sont solutions de (I.10) au sens où, dès que l'un des deux membres de (I.10) est bien défini, l'autre l'est aussi et l'égalité a lieu. Plus explicitement, $(T_t)_{t\geq 0}$ est une solution si, dès que f vérifie

i) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, T_{s\wedge t}$ pour p.t. s

ii) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, H_s$ pour p.t. $s \leq t$

iii) $\int_0^t ||T_s D_s f||^2 + ||H_s D_s f||^2\, ds < \infty$,

on doit avoir $f \in \mathrm{Dom}\, T_t$; et réciproquement. ON veut de plus que dès que ces conditions sont remplies l'égalité (I.10) soit vérifiée. En résumé, on cherche les solutions de (I.10) avec lesquelles on peut utiliser l'équation (I.10) sans se poser aucun problème de domaine, d'intégrabilité, ...

Le sens du théorème qui suit est que l'ensemble des telles solutions n'est jamais vide, qu'il contient une seule solution et que cette solution est l'intégrale A-L correspondante, munie de son domaine restreint.

Dans le théorème suivant nous utilisons le mot *maximal* pour des processus d'opérateurs satisfaisant certaines propriétés. Cette maximalité doit être comprise au sens de l'ordre partiel suivant sur les processus : deux processus d'opérateurs $(S_t)_{t\geq 0}$ et $(T_t)_{t\geq 0}$ sont tels que $(S_t)_{t\geq 0} \subset (T_t)_{t\geq 0}$ si $S_t \subset T_t$ pour tout t au sens des extensions d'opérateurs.

Théorème I.12 – *Soit $(H_t)_{t\geq 0}$ un processsus adapté d'opérateurs sur Φ. Soit $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des processus adaptés d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ sur Φ satisfaisant*

1) $f \in \mathrm{Dom}\, T_t$ *si et seulement si* i) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, T_{s\wedge t}$ *pour p.t.* s ;
ii) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, H_s$ *pour p.t.* $s \leq t$;
iii) $\int_0^t ||T_s D_s f||^2 + ||H_s D_s f||^2 \, ds < \infty$;

2) *pour tout* $f \in \mathrm{Dom}\, T_t$ *on a*

$$T_t f = \int_0^\infty T_{s\wedge t} D_s f \, d\chi_s + \int_0^t H_s D_s f \, d\chi_s.$$

Alors $\mathcal{L}(H)$ contient un élément et un seul (à restriction près) ; cet élément maximal est le processus $(\Lambda_t(H))_{t\geq 0}$ d'intégrales A-L, muni de son domaine restreint.

Soit $\mathcal{A}^\dagger(H)$ l'ensemble des processus adaptés d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ sur Φ satisfaisant

1) $f \in \mathrm{Dom}\, T_t$ *si et seulement si* i) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, T_{s\wedge t}$ *pour p.t.* s ;
ii) $P_s f \in \mathrm{Dom}\, H_s$ *pour p.t.* $s \leq t$;
iii) $\int_0^t ||T_s D_s f||^2 + ||H_s P_s f||^2 \, ds < \infty$;

2) *pour tout* $f \in \mathrm{Dom}\, T_t$ *on a*

$$T_t f = \int_0^\infty T_{s\wedge t} D_s f \, d\chi_s + \int_0^t H_s P_s f \, d\chi_s.$$

Alors $\mathcal{A}^\dagger(H)$ contient un et un seul élément (à restriction près) ; cet élément maximal est le processus $(A_t^\dagger(H))_{t\geq 0}$ d'intégrales A-L, muni de son domaine restreint.

Soit $\mathcal{A}(H)$ l'ensemble des processus adaptés d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ sur Φ satisfaisant

1) $f \in \mathrm{Dom}\, T_t$ *si et seulement si* i) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, T_{s\wedge t}$ *pour p.t.* s ;
ii) $D_s f \in \mathrm{Dom}\, H_s$ *pour p.t.* $s \leq t$;
iii) $\int_0^t ||T_s D_s f||^2 \, ds < \infty$;
iv) $(H_s D_s f)_{s\leq t}$ *est Lebesgue intégrable* ;

2) *pour tout* $f \in \operatorname{Dom} T_t$ *on a*

$$T_t f = \int_0^\infty T_{s\wedge t} D_s f \, d\chi_s + \int_0^t H_s D_s f \, ds.$$

Alors $\mathcal{A}(H)$ *contient un et un seul élément (à restriction près) ; cet élément maximal est le processus* $(A_t(H))_{t\geq 0}$ *d'intégrales A-L* $(A_t(H))_{t\geq 0}$*, muni de son domaine restreint.*

Soit $\mathcal{T}(H)$ *l'ensemble des processus adaptés d'opérateurs* $(T_t)_{t\geq 0}$ *sur* Φ *satisfaisant*

1) $f \in \operatorname{Dom} T_t$ *si et seulement si*
   - i) $D_s f \in \operatorname{Dom} T_{s\wedge t}$ *pour p.t.* $s \leq t$;
   - ii) $P_s f \in \operatorname{Dom} H_s$ *pour p.t.* $s \leq t$;
   - iii) $\int_0^t ||T_s D_s f||^2 \, ds < \infty$;
   - iv) $(H_s P_s f)_{s\leq t}$ *est Lebesgue intégrable* ;

2) *pour tout* $f \in \operatorname{Dom} T_t$ *on on a*

$$T_t f = \int_0^\infty T_{s\wedge t} D_s f \, d\chi_s + \int_0^t H_s P_s f \, ds.$$

Alors $\mathcal{T}(H)$ *contient un et un seul élément (à restriction près) ; cet élément maximal est le processus* $(T_t(H))_{t\geq 0}$ *d'intégrales A-L* $(T_t(H))_{t\geq 0}$*, muni de son domaine restreint.*

II. Une algèbre de semimartingales quantiques

La plus intéressante application des définitions A-M des intégrales stochastiques quantiques est qu'elles permettent, dans les bons cas, de considérer des intégrales stochastiques quantiques définies sur tout l'espace de Fock. Dans ce cas elles sont composables et on a la formule d'Ito quantique du Théorème I.5 qui fournit à nouveau des intégrales stochastiques définies partout. Nous allons exhiber une famille de telles intégrales stochastiques qui forment une algèbre pour la composition. Nous pourrons, sur cette algèbre, développer une calcul stochastique fonctionnel ainsi que des notions de crochets droit et oblique quantiques, conformes à ce que l'on peut attendre. Cette partie est extraite de [At5].

II.1 L'algèbre $\mathcal{S}$

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des processus adaptés d'opérateurs bornés $(T_t)_{t\geq 0}$ sur Φ admettant, sur un espace cohérent $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, une représentation intégrale

$$T_t = \int_0^t H_s \, d\Lambda_s + \int_0^t K_s \, dA_s^\dagger + \int_0^t L_s \, dA_s + \int_0^t M_s \, ds$$

où tous les opérateurs H_s, K_s, L_s, M_s sont bornés et satisfont :
$s \mapsto ||M_s||$ est localement intégrable,
$s \mapsto ||K_s||$ and $s \mapsto ||L_s||$ est localement de carré intégrable,
$s \mapsto ||H_s||$ est localement bornée.

Théorème II.1 – *Tout élément $(T_t)_{t\geq 0}$ de $\mathcal{S}$ a sa représentation intégrale qui peut être étendue à tout l'espace de Fock.*
L'espace $\mathcal{S}$ est une $*$-algèbre pour la composition et le passage à l'adjoint.

On dispose là d'une algèbre de semimartingales très utile (cf plus loin) et pratique sur laquelle on va pouvoir faire du calcul fonctionnel sans aucun problème de domaine. Mais définir $\mathcal{S}$ comme précédement pose des problèmes. En effet, les conditions portent sur la représentation intégrale éventuelle de $(T_t)_{t\geq 0}$ ainsi que sur la régularité de ses coefficients. Ce sont des conditions difficiles à vérifier dans la pratique. Il serait plus agréable d'avoir une caractérisation des éléments $(T_t)_{t\geq 0}$ de $\mathcal{S}$ qui ne porte que sur la régularité de $(T_t)_{t\geq 0}$ seul. Nous obtenons, dans ce sens, le résultat satisfaisant suivant.

Un processus adapté d'opérateurs bornés $(T_t)_{t\geq 0}$ est appelé *semimartingale régulière* s'il existe une mesure absolument continue μ sur $I\!R^+$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M})$, tout $r < s < t$ on ait

$$||T_t P_r f - T_s P_r f||^2 \leq ||P_r f||^2 \mu([s,t]) \tag{II.1}$$
$$||T_t^* P_r f - T_s^* P_r f||^2 \leq ||P_r f||^2 \mu([s,t]) \tag{II.2}$$
$$||P_s T_t P_r f - T_s P_r f|| \leq ||P_r f|| \, \mu([s,t]). \tag{II.3}$$

Théorème II.2 – *Un processus adapté d'opérateurs bornés $(T_t)_{t\geq 0}$ est un élément de l'algèbre $\mathcal{S}$ si et seulement si c'est une semimartingale régulière d'opérateurs.*

II.2 Crochets droits et obliques quantiques

L'algèbre $\mathcal{S}$ est un point de départ pour développer un calcul stochastique quantique proche du calcul stochastique usuel. Pour tous éléments T, T' de $\mathcal{S}$ on peut définir de nouveaux processus adaptés : *les intégrales de T par rapport à T'* :

$$\int_0^t T_s \, dT'_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t T_s H'_s \, d\Lambda_s + \int_0^t T_s K'_s \, dA^\dagger_s + \int_0^t T_s L'_s \, dA_s + \int_0^t T_s M'_s \, ds$$
$$\int_0^t dT'_s \, T_s \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t H'_s T_s \, d\Lambda_s + \int_0^t K'_s T_s \, dA^\dagger_s + \int_0^t L'_s T_s \, dA_s + \int_0^t M'_s T_s \, ds.$$

Ces processus ne sont en général pas des éléments de $\mathcal{S}$. En effet, ils admettent une représentation intégrale, les coefficients dans ces représentations satisfont les mêmes critères que les éléments de $\mathcal{S}$, mais les opérateurs $\int_0^t T_s \, dT'_s$ et $\int_0^t dT'_s \, T_s$ eux-mêmes ne sont pas en général bornés. Ces intégrales $\int T \, dT'$ et $\int dT' \, T$ ne sont a priori définies que sur des domaines de vecteurs cohérents $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. Il est à noter que grâce au théorème d'extension et aux conditions de norme sur les coefficients, leur représentation intégrale (au sens A-M) s'étend à tout leur domaine.

On note $\mathcal{S}'$ l'espace de processus adaptés $(T_t)_{t\geq 0}$ sur Φ, admettant une représentation intégrale sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ telle que les coefficients de cette représentation satisfont les mêmes conditions que dans la définition de $\mathcal{S}$. La seule différence avec $\mathcal{S}$ est que, dans $\mathcal{S}'$, le processus $(T_t)_{t\geq 0}$ *n'est pas nécessairement constitué d'opérateurs bornés*. Ainsi $\mathcal{S}$ est un sous-espace propre de $\mathcal{S}'$ (nous verrons dans la section II.4, qu'il existe en fait une bijection à la fois naturelle et surprenante entre ces deux espaces).

Si $(T_t)_{t\geq 0}$ et $(T'_t)_{t\geq 0}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$, on a vu que $\int T\, dT'$ et $\int dT'\, T$ sont des éléments de $\mathcal{S}'$. Il apparaît aussi que $\mathcal{S}'$ est l'espace naturel pour définir les crochets droit et oblique des processus d'opérateurs.

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ et $(T_t)'_{t\geq 0}$ deux éléments de $\mathcal{S}'$. On définit le *crochet droit* de T avec T' comme étant le processus d'opérateurs

$$[T, T']_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t H_s H'_s\, d\Lambda_s + \int_0^t H_s K'_s\, dA^\dagger_s + \int_0^t L_s H'_s\, dA_s + \int_0^t L_s K'_s\, ds.$$

On définit le *crochet oblique* de T avec T' comme étant le processus d'opérateurs

$$\langle T, T'\rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t L_s K'_s\, ds.$$

Il est clair que $[T, T']$ et $\langle T, T'\rangle$ sont tous deux des éléments de $\mathcal{S}'$. Dans la troisième partie de ce texte nous ferons le lien entre ces crochets quantiques et les crochets du calcul stochastique usuel.

A partir des définitions, on peut facilement vérifier que ces crochets quantiques satisfont certaines propriétés usuelles des crochets. Celles-ci sont résumées dans la proposition suivante. Il faut noter qu'un élément de $\mathcal{S}'$ est la somme d'une martingale d'opérateurs (la somme des intégrales en $d\Lambda$, $dA^\dagger$ et dA) et un terme à "variation finie" (l'intégrale par rapport au temps).

Proposition II.3 – *Soient S, S', S'' des éléments de $\mathcal{S}'$, soit T un élément de $\mathcal{S}$. On a les propriétés suivantes.*

i) *$[S, S']$ et $\langle S, S'\rangle$ ne dépendent que de la partie martingale de S et S'.*

ii) *Si S et S' sont des martingales (d'opérateurs) dans $\mathcal{S}$, alors $SS' - \langle S, S'\rangle$ et $SS' - [S, S']$ sont aussi des martingales.*

iii) *Les crochet quantiques sont associatifs, c'est à dire par exemple*

$$[S, [S', S'']] = [[S, S'], S''].$$

iv) *On a* $[\int T\, dS, S'] = \int T\, d[S, S']$ *et* $[S', \int dS\, T] = \int d[S', S]\, T$. *On a les mêmes identités pour les crochets obliques.*

v) *On a*

$$[S,S']^* = [S'^*, S^*]$$
$$\langle S,S'\rangle^* = \langle S'^*, S^*\rangle.$$

Dans le cadre du calcul stochastique usuel le crochet droit de deux semimartingales est la limite, en un certain sens, des variations quadratiques associées ; le crochet oblique est la limite des variations quadratiques conditionnées correctement. On peut naturellement se demander ici si l'on a quelque chose d'équivalent pour les crochets quantiques. Ce résultat serait satisfaisant en soi mais il aurait de plus l'avantage de répondre à un autre problème. En effet, l'algèbre $\mathcal{S}$ admet une caractérisation intrinsèque et nous avons déjà discuté de l'intérêt d'une telle caractérisation. Il est alors décevant d'avoir une définition des crochets quantiques qui soit basée sur la représentation intégrale des processus. En obtennant une caractérisation via les variations quadratiques, nous aurions du même coup une caractérisation intrinsèque des crochets quantiques.

Théorème II.4 – *Soient $(S_t)_{t\geq 0}$ et $(T_t)_{t\geq 0}$ deux éléments de $\mathcal{S}$. Soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$, soit $\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t\}$ une suite de subdivisions de $[0,t]$ dont le diamètre tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace admissible de $L^2_{lb}(\mathbb{R}^+)$.*

Alors, sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, le crochet droit $[T,S]_t$ est la limite faible quand n tend vers $+\infty$ des variations quadratiques

$$\sum_i (T_{t_{i+1}^n} - T_{t_i^n})(S_{t_{i+1}^n} - S_{t_i^n})$$

et, sur Φ, le crochet oblique $\langle T,S\rangle_t$ est la limite faible des variations quadratiques conditionnées

$$\sum_i P_{t_i^n}(T_{t_{i+1}^n} - T_{t_i^n})(S_{t_{i+1}^n} - S_{t_i^n})P_{t_i^n}.$$

II.3 Calcul d'Ito fonctionnel

Avec le développement du langage des crochets, la formule d'intégration par partie prend une forme très simple. En effet, pour tous S et T dans $\mathcal{S}$ on a

$$S_tT_t = \int_0^t S_s\,dT_s + \int_0^t dS_s\,T_s + [S,T]_t. \tag{II.4}$$

Comme $\mathcal{S}$ est une algèbre on peut considérer des fonctionnelles polynômiales sur $\mathcal{S}$. Par recurrence sur (II.4) on obtient le résultat suivant.

Proposition II.5 – *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un élément $\mathcal{S}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors*

$$T_t^n = \int_0^t H_n(s)\, d\Lambda_s + \int_0^t K_n(s)\, dA_s^\dagger + \int_0^t L_n(s)\, dA_s + \int_0^t M_n(s)\, ds$$

où

$$\begin{aligned}
H_n(s) &= (T_s + H_s)^n - T_s^n \\
K_n(s) &= \sum_{p+q=n-1} T_s^p K_s (T_s + H_s)^q \\
L_n(s) &= \sum_{p+q=n-1} (T_s + H_s)^p L_s T_s^q \\
M_n(s) &= \sum_{p+q=n-1} T_s^p M_s T_s^q + \sum_{p+q+r=n-2} T_s^p L_s (T_s + H_s)^q K_s T_s^r.
\end{aligned}$$

Nous disposons donc d'une formule d'Ito quantique pour les polynômes sur $\mathcal{S}$. Il est naturel de se demander si on peut aller plus loin que les polynômes. Les deux théorèmes que je vais énoncer sont dus à G. Vincent-Smith [ViS]. En les énonçant dans cette thèse je n'ai pas l'intention de les reprendre à mon compte, mais je les cite afin de montrer l'intérêt supplémentaire qu'ils apportent à l'algèbre $\mathcal{S}$, qui s'avère être bien mieux qu'une simple algèbre. Ces résultats confirment que $\mathcal{S}$ est vraiment un espace naturel de semimartingales quantiques, car il va en un certain sens être stable par les fonctions C^2.

Le premier pas à franchir est de passer aux fonctions analytiques. Faisons un petit rappel de calcul fonctionnel sur les opérateurs bornés pour les fonctions analytiques.

Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert. Pour tout λ dans l'ensemble résolvant de T, on note $R_\lambda(T)$ la résolvante de T au point λ. Soit f une fonction analytique sur le disque $D(0,R)$ où $R > ||T||$. Alors l'opérateur $f(T)$ est défini par

$$f(T) = \oint_\gamma f(\lambda) R_\lambda(T)\, d\lambda$$

où γ est le cercle $C(0,r)$ avec $R > r > ||T||$ et $\oint_\gamma$ est $\frac{1}{2\pi i}$ fois l'intégrale de contour le long de γ.

Théorème II.6 – *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un élément de $\mathcal{S}$. Soit $T \in \mathbb{R}^+$ fixé. Soit $\rho = \max\{||T_t||, ||T_t + H_t||; t \leq T\}$. Soit f une fonction analytique sur $D(0,R)$ pour un $R > \rho$. Alors $(f(T_t))_{t\geq 0}$ est encore un élément de $\mathcal{S}$ et sa représentation intégrale, pour $t \leq T$, est donnée par*

$$f(T_t) = f(0) + \int_0^t H_f(s)\, d\Lambda_s + \int_0^t K_f(s)\, dA_s^\dagger + \int_0^t L_f(s)\, dA_s + \int_0^t M_f(s)\, ds$$

où

$$
\begin{aligned}
H_f(s) &= f(T_s + H_s) - f(T_s)\\
K_f(s) &= \oint_\gamma f(\lambda)\big(R_\lambda(T_s)\,K_s\,R_\lambda(T_s + H_s)\big)\,d\lambda\\
L_f(s) &= \oint_\gamma f(\lambda)\big(R_\lambda(T_s + H_s)\,L_s\,R_\lambda(T_s)\big)\,d\lambda\\
M_f(s) &= \oint_\gamma f(\lambda)\big(R_\lambda(T_s)\,M_s\,R_\lambda(T_s)\big)\,d\lambda\\
&\quad + \oint_\gamma f(\lambda)\big(R_\lambda(T_s)\,L_s\,R_\lambda(T_s + H_s)\,K_s\,R_\lambda(T_s)\big)\,d\lambda
\end{aligned}
$$

et γ est le cercle $C(0,r)$ avec $R > r > \rho$.

Quand les opérateurs sont auto-adjoint on sait que le calcul fonctionnel peut être développé au-delà des fonctions analytiques. Soit T un opérateur auto-adjoint borné sur un espace de Hilbert. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est aussi Lebesgue intégrable. On définit alors l'opérateur $f(T)$ par

$$
f(T) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(p) e^{ipT}\,dp.
$$

On définit l'espace $C^{2+}_{\mathrm{loc}} \overset{\mathrm{def}}{=} \{f \in L^1(\mathbb{R}); p^2\widehat{f}(p) \in L^1(\mathbb{R})\}$. Alors, pour une fonction f dans C^{2+}_{loc}, Vincent-Smith montre un résultat très satisfaisant à propos de l'algèbre $\mathcal{S}$.

Théorème II.7 – *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un processus dans $\mathcal{S}$ constitué d'opérateurs auto-adjoints. Soit*

$$
T_t = \int_0^t H_s\,d\Lambda_s + L_s\,dA_s + L_s^*\,dA_s^\dagger + M_s\,ds
$$

sa représentation intégrale (les opérateurs H_s et M_s doivent être auto-adjoints). Soit f un élément de C^{2+}_{loc}. Alors le processus $(f(T_t))_{t\geq 0}$ est un élément de $\mathcal{S}$, constitué d'opérateurs auto-adjoints et dont la représentation intégrale est donnée par

$$
T_t = \int_0^t H_f(s)\,d\Lambda_s + L_f(s)\,dA_s + L_f^*(s)\,dA_s^\dagger + M_f(s)\,ds
$$

où

$$
\begin{aligned}
H_f(s) &= f(T_s + H_s) - f(T_s)\\
L_f(s) &= \int_{\mathbb{R}} ip\widehat{f}(p)\Big\{\int_0^1 e^{ip(1-u)T_s}\,L_s\,e^{ipu(T_s+H_s)}\,du\Big\}\,dp
\end{aligned}
$$

$$M_f(s)=\int_{\mathbb{R}} ip\widehat{f}(p)\Big\{\int_0^1 e^{ip(1-u)T_s}M_s\,e^{ipuT_s}\,du\Big\}\,dp$$
$$+\int_{\mathbb{R}} ip\widehat{f}(p)\Big\{\int_0^1\int_0^1 ue^{ip(1-u)T_s}L_s\,e^{ipu(1-v)(T_s+H_s)}L_s^*\,e^{ipuvT_s}\,du\,dv\Big\}\,dp.$$

II.4 Une transformation remarquable

Les résultats exposés ici, seront détaillés dans un article à venir ([At12]). Il s'agit des premières propriétés d'une transformation très intéressante que l'on peut appliquer aux processus d'opérateurs. Nous n'en sommes qu'au stade où nous constatons les résultats surprenants que cette transformation donne, sans en comprendre profondement les raisons. Nous laissons beaucoup de problèmes ouverts, mais le but de cette section est d'expliquer que cette transformation réalise une bijection entre les espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. En particulier, dans un sens, elle a la propriété de rendre bornés des opérateurs qui ne l'étaient pas, sans leur "faire perdre leur âme". Je pense que cette transformation est amenée à jouer un rôle important en calcul stochastique quantique.

Soit $T_\cdot=(T_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs sur Φ. On définit un nouveau processus *adapté* d'opérateurs $(D_t(T_\cdot))_{t\geq 0}$ sur Φ par

$$D_t(T_\cdot)P_tf=T_tP_tf-\int_0^t T_sD_sf\,d\chi_s.$$

(notez que pour définir un opérateur adapté à l'instant t il suffit de le définir sur les vecteurs de la forme P_tf). Il faudrait à ce stade décrire précisement, en fonctions des domaines des T_t, sur quels domaines sont définis les $D_t(T_\cdot)$. En toute généralité, ce n'est ni très simple ni très agréable. Par contre, si on restreint notre étude aux processus d'opérateurs qui sont décrit par des intégrales stochastiques quantiques (et c'est ce cas qui nous intéresse), cela devient plus facile. En effet, si T_t admet une représentation de la forme

$$T_t=\int_0^t H_s\,d\Lambda_s+\int_0^t K_s\,dA_s^\dagger+\int_0^t L_s\,dA_s+\int_0^t M_s\,ds$$

où les intégrales sont prises au sens A-L sur leur domaine restreint, on voit que $D_t(T_\cdot)P_tf$ est en fait défini en otant à T_tP_tf le terme commun à toutes les équations A-M : $\int_0^t T_sD_sf\,d\chi_s$. En particulier, grâce au Théorème I.12, l'opérateur $D_t(T_\cdot)$ est au moins défini sur le domaine de T_t.

Pour un processus adapté d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ on défini le processus adapté d'opérateurs $D_t^{-1}(T_\cdot)_{t\geq 0}$ par

$$D_t^{-1}(T_\cdot)=T_t+\int_0^t T_s\,d\Lambda_s.$$

Le domaine de ce processus est défini sans ambiguïté.

Proposition II.8 – *Pour tout processus adapté d'opérateurs* $(T_t)_{t\geq 0}$ *on a, pour tout* t

$$D_t\big(D_\cdot^{-1}(T_\cdot)\big) = D_t^{-1}\big(D_\cdot(T_\cdot)\big) = T_t.$$

Il y a quantité de résultats que l'on peut montrer sur ces transformations de processus qui vont toutes dans le sens de montrer qu'elles ne modifient pas beaucoup le processus d'origine. Par exemple, un processus d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ vérifie des conditions du type quasimartingales d'Enchev, ou du type de celles définissant $\mathcal{S}$ si et seulement si le processus $(D_t(T_\cdot))_{t\geq 0}$ les vérifie aussi.

Mais le résultat le plus frappant que l'on obtient avec ces transformations est la façon dont elles font le lien entre les deux espaces de semimartingales quantiques $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

Théorème II.9 – *L'image de l'espace* $\mathcal{S}'$ *par la transformation* $D_\cdot(\cdot)$ *est exactement l'espace* $\mathcal{S}$*. En conséquence, la transformation* $D_\cdot(\cdot)$ *réalise une bijection entre* $\mathcal{S}'$ *et* $\mathcal{S}$*.*

Cette propriété qu'ont les transformations $D_\cdot(\cdot)$ et $D_\cdot^{-1}(\cdot)$ de réaliser une bijection entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ est remarquable. Ce n'est pas le fait que les deux ensembles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ aient le même cardinal malgré l'inclusion propre $\mathcal{S}\subset\mathcal{S}'$ qui est vraiment surprenant, c'est plutôt le fait qu'on ait une description explicite et très simple d'une bijection.

La première conséquence de l'inclusion $D_\cdot(\mathcal{S}')\subset\mathcal{S}$ est que la transformation $D_\cdot(\cdot)$ a la propriété de rendre bornés des opérateurs qui ne l'étaient pas au départ. Les développements qui peuvent s'en suivre sont nombreux. Par exemple, si on se donne deux processus S et T dans $\mathcal{S}'$, ils ne sont a priori pas composable partout car ils ne sont pas constitués d'opérateurs bornés. Par contre on peut composer les deux processus $D_\cdot(T)$ et $D_\cdot(S)$ dans $\mathcal{S}$ puis ramener le résultat dans $\mathcal{S}'$ par D^{-1}. On définit ainsi un produit $T*S$ dans $\mathcal{S}'$. On peut se poser la question de la nature d'un tel produit. Par exemple, on peut montrer que si T est somme d'une intégrale d'annihilation et d'une de conservation seulement, si S est somme d'une intégrale de création et d'une de conservation, alors

$$T*S=[T,S]$$

où $[T,S]$ est le crochet droit quantique sur $\mathcal{S}'$. Ce résultat n'est pas vrai pour S et T plus généraux (un terme supplémentaire se rajoute au crochet).

III. Décomposition chaotique d'opérateurs

III.1 Les noyaux de Maassen

Les noyaux de Maassen sont un autre type de représentation intégrale des opérateurs sur l'espace de Fock. Ils ont été définis sous leur forme initiale à deux arguments par Maassen [Ma2] et sous leur forme définitive à trois arguments par Meyer [Me2]. Les noyaux de Maassen sont au calcul stochastique quantique ce que les décompositions en chaos sont au calcul stochastique classique. C'est-à-dire qu'un noyau de Maassen est formellement un opérateur T sur Φ qui admet une représentation comme série d'intégrales stochastiques quantiques itérées d'opérateurs *scalaires*. En utilisant des notations analogues à celles de l'espace de Guichardet on peut écrire

$$T = \int_{\mathcal{P}^3} \widehat{T}(\alpha, \beta, \gamma) I \, dA^\dagger_\alpha \, d\Lambda_\beta \, dA_\gamma$$

où pour $X = A^\dagger, \Lambda$ ou A et pour $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$ la notation dX_τ signifie $dX_{t_1} \ldots dX_{t_n}$ et où $\widehat{T}$ est une application de $\mathcal{P}^3$ dans $\mathbb{C}$.

Cette écriture n'a pas de sens rigoureux, en particulier cette forme ne respecte pas l'adaptation des processus à intégrer et la convergence de la série doit être étudiée. Mais cela n'empeche pas de voir comment agit formellement un tel opérateur sur un vecteur de l'espace de Fock. Il suffit de déterminer formellement l'action d'un opérateur de la forme $dA^\dagger_\alpha \, d\Lambda_\beta \, dA_\gamma$ sur un élément f de l'espace de Fock de la forme $d\chi_{t_1} \ldots d\chi_{t_n}$. On obtient (cf [Me1]) que l'image Tf d'un vecteur $f \in \Phi$ par T a la décomposition chaotique suivante

$$[Tf](\sigma) = \int_{\mathcal{P}} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\sigma} \widehat{T}(\alpha, \beta, \mu) f(\mu + \beta + \gamma) \, d\mu \tag{III.1}$$

où le signe + signifie l'union disjointe.

Bien que tout ce qui a été dit précedement ne soit pas rigoureux, l'expression ci-dessus peut avoir un sens pour de "bons" vecteurs f et de "bons" noyaux $T(\cdot, \cdot, \cdot)$. C'est là la définition rigoureuse de Maassen et Meyer. Un opérateur T de Φ dans lui-même est dit avoir un *noyau de Maassen* s'il existe une fonction $\widehat{T}$ sur $\mathcal{P}^3$ (en fait $\widehat{T}$ n'a besoin d'être défini que sur les triplets deux à deux disjoints α, β, γ dans $\mathcal{P}^3$) telle que pour un ensemble dense de vecteurs f dans Φ on ait que l'identité (III.1) soit bien définie et soit vérifiée.

Dans son article, Maassen développe la théorie de ces noyaux. Elle est très satisfaisante car sous certaines conditions ces noyaux forment une $*$-algèbre d'opérateurs (qui ne sont pas forcement bornés). Les formules de composition et de passage à l'adjoint sont simples. Faire des calculs avec de tels opérateurs est particulièrement simple et explicite. Mais cette théorie a un gros défaut : on ne connait aucun critère général pour décider si un opérateur donné T sur Φ possède une telle représentation ou non. On connait seulement une liste d'exemples (opérateurs de multiplication par une variable aléatoire usuelle, des solutions d'équations différentielles stochastiques quantiques,...). Ce manque de critère fait que la théorie des intégrales stochastiques quantiques et celle des noyaux de Maassen sont déconnectées, alors qu'elles ne devraient pas l'être.

Ce que nous présentons ici est une idée dont on peut espérer qu'elle donnera des critères satisfaisants pour qu'un opérateur admette un noyau de Maassen.

Pour le moment cette idée fonctionne parfaitement sur la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt dans Φ, mais il y a de bonnes raisons d'espérer que le point de vue A-L sur les intégrales stochastiques quantiques permettra d'atteindre de bien meilleurs résultats. Nous présentons maintenant cette idée et son inspiration probabiliste. Nous verrons ensuite comment elle fonctionne sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Considérons par exemple l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et son mouvement brownien canonique $(W_t)_{t\geq 0}$. On sait que toute fonctionnelle de $(W_t)_{t\geq 0}$ qui est de carré intégrable admet une décomposition en chaos. C'est-à-dire que toute variable aléatoire f dans $L^2(\Omega)$ peut être représentée comme une série d'intégrales itérées par rapport à $(W_t)_{t\geq 0}$ de fonctions déterministes. C'est-à-dire une représentation de la forme

$$f = \mathbb{E}[f] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0<t_1<\ldots<t_n} f_n(t_1, \ldots, t_n)\, dW_{t_1} \ldots dW_{t_n}.$$

On peut obtenir la décomposition en chaos d'une variable aléatoire f en itérant sa représentation prévisible. En effet, toute variable aléatoire f de $L^2(\Omega)$ peut être représentée sous la forme

$$f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \Psi_s\, dW_s,$$

où Ψ est une processus prévisible dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Donc, pour presque tout s, Ψ_s est un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On peut appliquer à nouveau la propriété de représentation prévisible :

$$\Psi_s = \mathbb{E}[\Psi_s] + \int_0^s \Psi'_{s,u}\, dW_u,$$

pour un processus prévisible $(\Psi'_{s,u})_{u\leq s}$. En insérant cette identité dans la représentation de f, on obtient

$$f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \mathbb{E}[\Psi_s]\, dW_s + \int_0^\infty \int_0^s \Psi'_{s,u}\, dW_u\, dW_s.$$

En répétant à nouveau cette procédure on a

$$\begin{aligned} f = \mathbb{E}[f] &+ \int_0^\infty \mathbb{E}[\Psi_s]\, dW_s + \int_0^\infty \int_0^s \mathbb{E}[\Psi'_{s,u}]\, dW_u\, dW_s \\ &+ \int_0^\infty \int_0^s \int_0^u \Psi''_{s,u,v}\, dW_v\, dW_u\, dW_s. \end{aligned}$$

On peut itérer cette opération indéfiniment. On obtient alors deux termes dans la représentation de f : une somme d'intégrales stochastiques itérées de fonctions *déterministes* et une intégrale stochastique itérée d'un processus prévisible. Le premier terme constitue le début de la décomposition chaotique de la variable aléatoire f, le second terme va tendre vers 0 au fur et à mesure que l'on itère la procédure. On obtient ainsi la décomposition chaotique de f.

Nous voulons appliquer la même méthode dans le cadre des opérateurs sur l'espace de Fock. Afin de simplifier nos expressions nous allons changer certaines notations, mais uniquement dans le cadre de cette section. Le processus de conservation $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$ est noté $(A_t^\circ)_{t\geq 0}$, le processus d'annihilation $(A_t)_{t\geq 0}$ est noté $(A_t^-)_{t\geq 0}$, le processus de création conserve la même notation.

Supposons qu'il existe une famille $\mathcal{I}$ d'opérateurs T sur Φ qui admettent une représentation intégrale

$$T = \lambda I + \sum_{\varepsilon \in \{\circ, \dagger, -\}} \int_0^\infty H_s^\varepsilon \, dA_s^\varepsilon$$

sur un domaine $\mathcal{D}$ et qui soit telle que les coefficients H_s^ε de cette représentation appartiennent encore à la famille $\mathcal{I}$. On peut alors représenter chacun des opérateurs H_s^ε :

$$H_s^\varepsilon = \lambda_s^\varepsilon I + \sum_{\varepsilon' \in \{\circ, \dagger, -\}} \int_0^s H_{s,u}^{\varepsilon, \varepsilon'} \, dA_u^{\varepsilon'}.$$

En revenant à la représentation de T on obtient

$$T = \lambda I + \sum_{\varepsilon \in \{\circ, \dagger, -\}} \int_0^\infty \lambda_s^\varepsilon I \, dA_s^\varepsilon + \sum_{\varepsilon, \varepsilon' \in \{\circ, \dagger, -\}} \int_0^\infty \int_0^s H_{s,u}^{\varepsilon, \varepsilon'} \, dA_u^{\varepsilon'} \, dA_s^\varepsilon.$$

On peut itérer cette procédure indéfiniment. On voit, à l'étape n que la représentation de T se décompose en deux parties : la première est une somme d'intégrales itérées d'opérateurs *scalaires* par rapport aux trois bruits quantiques, la seconde partie est une somme d'intégrales itérées d'ordre n d'un processus d'opérateurs. Par analogie avec la situation probabiliste on peut espérer voir ce dernier terme converger vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ce qui resterait alors serait la décomposition chaotique quantique de l'opérateur T. Il serait alors facile d'en tirer le noyau de Maassen de l'opérateur, il s'agit juste d'une question de réordonnement et d'un peu d'analyse pour vérifier la convergence de la série ([AH1]).

III.2 Le cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt

L'idée développée ci-dessus s'applique parfaitement au cas des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur l'espace de Fock. Le fait que les opérateurs de Hilbert-Schmidt dispose d'un noyau de Maassen n'est pas un résultat nouveau, cela a déjà été prouvé dans [HLP]. En effet, un opérateur de Hilbert-Schmidt H sur l'espace de Fock est en particulier un opérateur de Hilbert-Schmidt sur l'espace de Guichardet

$L^2(\mathcal{P})$. A ce titre, comme tout opérateur de Hilbert-Schmidt, il admet un noyau L^2 :

$$[Hf](\sigma) = \int_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma, \mu) f(\mu)\, d\mu.$$

Il suffit de quelques transformations combinatoires simples (cf [At8]) pour le mettre sous la forme

$$[Hf](\sigma) = \int_{\mathcal{P}} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\sigma} \widehat{H}(\alpha, \beta, \mu) f(\mu + \beta + \gamma)\, d\mu.$$

Par contre, ce que l'on montre dans [At8] c'est que la procédure d'itération de la représentation intégrale fonctionne bien dans ce cas (i.e. elle est possible et elle converge) et elle permet ainsi de retrouver le noyau de Maassen de l'opérateur. Au passage, on y gagne une description plus explicite du noyau en fonction de l'opérateur. Nous allons maintenant résumer ces résultats.

Une martingale $(H_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs de Φ dans Φ est une *HS-martingale* si, pour tout $t \in I\!\!R^+$, l'opérateur H_t, restreint à $\Phi_{t]}$, est un opérateur Hilbert-Schmidt. On note $||\cdot||_{HS}$ la norme Hilbert-Schmidt des opérateurs.

Proposition III.1 – *Soit $t \in [0, +\infty]$ fixé, soit H_t un opérateur Hilbert-Schmidt de $\Phi_{t]}$ dans $\Phi_{t]}$. Alors H_t admet une représentation en intégrales stochastiques quantiques, au sens étendu A-M sur tout l'espace Φ, de la forme*

$$H_t = P_0[H_t 1]I - \int_0^t H_s^\circ\, dA_s^\circ + \int_0^t H_s^-\, dA_s^- + \int_0^t H_s^\dagger\, dA_s^\dagger,$$

où $(H_s^\circ)_{s\leq t}$ est la martingale associée à H_t et où, pour $\varepsilon = -, \dagger$, pour presque tout $s \leq t$ l'opérateur H_s^ε est Hilbert-Schmidt de $\Phi_{s]}$ dans $\Phi_{s]}$ et satisfait

$$\int_0^t ||H_s^\varepsilon||_{HS}^2\, ds \leq ||H_t||_{HS}^2.$$

Par conséquent les HS-martingales sont des éléments de l'algèbre $\mathcal{S}$ des semimartingales régulières.

On voit par cette proposition que la famille $\mathcal{I}$ des opérateurs Hilbert-Schmidt sur Φ est une famille qui satisfait les propriétés énoncées dans la sous-section précédente. On peut donc appliquer notre procédure d'itération.

Soit $E_n = \{\dagger, \circ, -\}^n$. Pour un élément $E = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E_n on note $n_\circ(E)$ le nombre d'éléments ε_i qui sont égaux à "$\circ$". Dans la suite on utilise des familles d'opérateurs $H_{t_n \cdots t_1}^{\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1}$, indexées par $E_n \times \mathcal{P}_n$. On utilise la notation :

$$\sum_{E\in E_n} \int_{\mathcal{P}_n} H_\mu^E\, dA_\mu^E \overset{\text{def}}{=} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in\{\dagger, \circ, -\}} \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} H_{t_n \cdots t_1}^{\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1}\, dA_{t_1}^{\varepsilon_1} \ldots dA_{t_n}^{\varepsilon_n}.$$

Par itération de la proposition précédente on obtient facilement le résultat suivant.

Proposition III.2 – *Soit H un opérateur Hilbert-Schmidt de Φ dans Φ. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, H admet sur tout l'espace Φ une représentation intégrale de la forme*

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{E \in E_n} \int_{\mathcal{P}_n} (-1)^{n_\circ(E)} P_0[H_\mu^E 1] I \, dA_\mu^E + \sum_{E \in E_N} \int_{\mathcal{P}_N} (-1)^{n_\circ(E)} H_\mu^E \, dA_\mu^E.$$

De plus, pour tout $\mu = (t_1 < \ldots < t_N) \in \mathcal{P}_N$, tout $E \in E_N$, l'opérateur H_μ^E est Hilbert-Schmidt de $\Phi_{t_1]}$ dans $\Phi_{t_1]}$. On a l'estimation

$$\int_{\mathcal{P}_N \cap [0,T]^N} ||H_\mu^E||_{HS}^2 \, d\mu \leq T^N ||H||_{HS}^2$$

pour tout $E \in E_N$, tout $0 < T < \infty$.

Dans cette représentation on distingue immédiatement le début de la décomposition chaotique quantique de H (le premier terme) du reste (le second terme). Soit $\mathcal{E}_{lb}^c$ l'espace cohérent $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est l'espace des fonctions localement bornées, à support compact.

Proposition III.3 – *Soit H un opérateur Hilbert-Schmidt de Φ dans Φ. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soit*

$$R_N = \sum_{E \in E_N} \int_{\mathcal{P}_N} (-1)^{n_\circ(E)} H_\mu^E \, dA_\mu^E$$

le reste dans la représentation intégrale itérée N fois de H (Proposition III.2). Alors, pour tout $f, g \in \mathcal{E}_{lb}^c$ la quantité $< g \, , R_N f >$ converge vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Donc, au sens de cette convergence faible on a

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{E \in E_n} \int_{\mathcal{P}_n} \mathbb{E}[H_\mu^E \mathbb{1}] I \, dA_\mu^E.$$

III.3 Convergence de séries d'intégrales quantiques itérées

Le point de vue adopté ci-dessus sur les noyaux de Maassen montre que l'on a plutot intérêt à considérer les séries d'intégrales stochastiques quantiques itérées

$$T = \lambda I + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\varepsilon \in E^n} \int_{0 < t_1 < \ldots < t_n} h^\varepsilon(t_1, \ldots, t_n) I \, dA_{t_1}^{\varepsilon_1} \ldots dA_{t_n}^{\varepsilon_n}$$

où $E = \{-, \circ, \dagger\}$ et où les h^ε sont des fonctions sur $\{0 < t_1 < \ldots < t_n\}$.

Dans [AH1] nous étudions ces séries dans le cadre des espaces de Fock de multiplicité quelconque finie. Nous donnons des conditions sur les fonctions h^ε pour que les intégrales itérées aient un sens, pour que la série converge et définisse un opérateur raisonable. Nous donnons ensuite des formules permettant de passer d'une représentation en séries de ce type à une représentation en noyau de Maassen et vice-versa.

Considérons des équations différentielles stochastiques quantiques du type usuel

$$dU_t = LU_t\, dt + H^\circ U_t\, dA_t^\circ + H^\dagger U_t\, dA_t^\dagger + H^- U_t\, dA_t^-$$

sur l'espace de Fock $\mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+))$, où $\mathcal{H}$ est un espace initial et où les opérateurs $L, H^\circ, H^\dagger$ et H^- agissent uniquement sur $\mathcal{H}$ (ce genre d'équation est la version bruitée de l'équation de Schrödinger $dU_t = LU_t\, dt$ sur $\mathcal{H}$).

Si on se donne une condition initiale $U_0 = I$ et que l'on applique une méthode de résolution à la Picard, on voit bien que la solution est donnée, au moins formellement, sous la forme d'une séries d'intégrales stochastiques quantiques itérées. On voit bien alors l'intérêt d'un critère de convergence du type de celui obtenu dans [AH1]. Dans [AH2], nous étudions en détail, avec ce point de vue des séries d'intégrales itérées, les solutions de certaines équations différentielles stochastiques quantiques provenant de problèmes physiques.

Deuxième partie :
TEMPS D'ARRÊTS QUANTIQUES

IV. Quasimartingales hilbertiennes et temps d'arrêts quantiques

IV.1 Quasimartingales hilbertiennes d'Enchev

Dans [Enc], O. Enchev étend au contexte hilbertien la notion usuelle de quasimartingales. On peut trouver un résumé agréable de son article dans [Me3]. Rappelons le résultat principal.

On appelle *espace de Hilbert filtré* un couple $(H, (P_t)_{t\geq 0})$ formé d'un espace de Hilbert H et d'une famille croissante, continue à droite $(P_t)_{t\geq 0}$ de projecteurs orthogonaux sur H.

Dans ce contexte on note H_t l'image de P_t et $H_{t-} = \cap_{s<t} H_s$. Un processus de vecteurs $(x_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ est *adapté* si $x_t \in H_t$ pour tout $t \in I\!R^+$. On dit que c'est une *martingale* si de plus $P_s x_t = x_s$ pour tous $s \leq t$. On dit que $(x_t)_{t\geq 0}$ est à *variation finie* si on a $\sup_{\mathcal{R}} \Sigma_i ||x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|| < \infty$ où $\mathcal{R} = \{t_i, i = 1, ..., n\}$ parcourt toutes les partitions de l'intervalle $[0, T]$.

On appelle *quasimartingale hilbertienne* tout processus adapté $(x_t)_{t\geq 0}$ dans H qui s'écrit $x_t = m_t + a_t$ où $(m_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et $(a_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation finie adapté à $(H_{t-})_{t\geq 0}$.

Le théorème d'Enchev est le suivant.

Théorème IV.1 – *Soit $(H, (P_t)_{t\geq 0})$ un espace de Hilbert filtré. Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté de vecteurs. Si on a $\sup_{\mathcal{R}} \Sigma_i ||P_{t_i} x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|| < +\infty$, où $\mathcal{R} = \{t_i, i = 1, ..., n\}$ parcourt toutes les partitions de l'intervalle $[0, T]$, alors $(x_t)_{t\geq 0}$ est une quasimartingale hilbertienne.*

Si $(x_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté qui satisfait $||P_s x_t - x_s|| \leq \int_s^t g(u)\,du$ pour $s \leq t$ et une fonction localement intégrable g, alors $(x_t)_{t\geq 0}$ est une quasimartingale hilbertienne dont la partie à variation finie est de la forme $a_t = \int_0^t h_u\,du$ avec $||h_u|| \leq g(u)$.

En appliquant ce théorème au contexte de l'espace de Fock, filtré par les projections P_t de la section I.2 on obtient facilement le résultat suivant ([A-S]).

Corollaire IV.2 – *Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ un processus de vecteurs dans Φ tel que $x_t \in \Phi_{t]}$ pour tout $t \in I\!R^+$ et tel que $x_0 = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *Il existe une fonction localement intégrable g sur $I\!R^+$ telle que pour tous $s \leq t$ on ait $||P_s x_t - x_s|| \leq \int_s^t g(u)\,du$.*

ii) *Le processus de vecteurs* $(x_t)_{t\geq 0}$ *admet une représentation unique sous la forme*

$$x_t = \int_0^t \xi_s \, d\chi_s + \int_0^t h_s \, ds$$

où $(\xi_t)_{t\geq 0}$ *et* $(h_t)_{t\geq 0}$ *sont des processus adaptés de vecteurs tels que* $\int_0^t ||\xi_s||^2 \, ds < \infty$ *et* $\int_0^t ||h_s|| \, ds < \infty$ *pour tout* t.

Grâce aux équations A-M définissant l'action des intégrales stochastiques quantiques sur les vecteurs de l'espace de Fock on obtient facilement le résultat suivant.

Corollaire IV.3 – *Soit* $(T_t)_{t\geq 0}$ *un processus adapté d'opérateurs sur* Φ *qui admet une représentation intégrale*

$$T_t = \int_0^t H_s \, d\Lambda_s + \int_0^t K_s \, dA_s^\dagger + \int_0^t L_s \, dA_s + \int_0^t M_s \, ds$$

sur un domaine $\mathcal{D}$. *Pour tout* $f \in \mathcal{D}$ *on pose* $f_t = P_t f$, $t \in \mathbb{R}^+$. *Alors le processus de vecteurs* $(T_t \, f_t)_{t\geq 0}$ *est une quasimartingale d'Enchev sur* Φ.

La généralisation hilbertienne des quasimartingales d'Enchev est intéressante en elle-même, mais elle s'avère être très utile dans le cadre de l'étude des temps d'arrêts quantiques ; en particulier pour définir l'arrêt des processus de vecteurs et d'opérateurs.

IV.2 Temps d'arrêts quantiques

La notion classique de temps d'arrêts sur un espace probabilisé filtré admet une extension naturelle dans le cadre des probabilités quantiques. Sur l'espace de Fock cette notion à été définie par Hudson ([Hud]) puis étudiée en détails par Parthasarathy et Sinha ([P-S]).

Un temps d'arrêt classique τ sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que l'événement $(\tau \leq t)$ soit dans $\mathcal{F}_t$. L'analogue en probabilités quantiques, sur l'espace de Fock, est donc un opérateur auto-adjoint τ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (i.e. une mesure spectrale τ à support dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et à valeurs dans les projecteurs orthogonaux de Φ) telle que, pour tout t, le projecteur $\tau([0,t])$ soit un opérateur t-adapté. On parlera tout simplement de *temps d'arrêt* sans préciser *quantiques*.

Dans la suite nous adoptons des notations plus probabilistes : pour tout borelien $A \subset \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'opérateur $\tau(A)$ est noté $1\!\!1_{\tau\in A}$; de même $\tau(\{t\})$ est noté $1\!\!1_{\tau=t}$, l'opérateur $\tau([0,t])$ est noté $1\!\!1_{\tau\leq t}$, etc...

Un temps d'arrêt τ est *fini* si $1\!\!1_{\tau=+\infty} = 0$. Un point t in $\mathbb{R}^+$ est un *point de continuité* pour τ si $1\!\!1_{\tau=t} = 0$. Il faut noter que le point 0 n'est pas de continuité pour τ que si $\tau \equiv 0$. On vérifie aussi qu'il y a au plus une quantité dénombrable de points qui ne sont pas de continuité pour τ.

Si τ et τ' sont deux temps d'arrêt sur Φ, on dit que $\tau \leq \tau'$ si pour tout $t \in I\!R^+$ on a $1\!\!1_{\tau \leq t} \geq 1\!\!1_{\tau' \leq t}$ (au sens usuel de comparaison de deux projections).

Un temps d'arrêt τ est *discret* s'il existe un ensemble fini $E = \{0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty\}$ tel que $1\!\!1_{\tau \in E} = I$.

Une suite de temps d'arrêts $(\tau_n)_n$ *converge* vers un temps d'arrêt τ si, pour tout point de continuité t de τ, les opérateurs $1\!\!1_{\tau_n \leq t}$ convergent fortement vers $1\!\!1_{\tau \leq t}$.

Proposition IV.4 – *Soit τ un temps d'arrêt quelconque. Il existe alors une suite $(\tau_n)_n$ de temps d'arrêts discrets tels que $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau$ et $(\tau_n)_n$ converge vers τ.*

IV.3 Arrêt de processus de vecteurs et d'opérateurs

Le problème principal avec les temps d'arrêt quantiques est d'identifier la classe des processus de vecteurs et d'opérateurs qui peuvent être arrétés. C'est-à-dire, pour un temps d'arrêt τ, quels sont les processus de vecteurs $(x_t)_{t\geq 0}$ (*resp.* d'opérateurs $(X_t)_{t\geq 0}$) sur lesquels on peut raisonablement définir la valeur x_τ (*resp.* X_τ) du processus à l'instant τ ?

Quand τ est un temps d'arrêt discret il y a une définition naturelle pour x_τ, obtenue en copiant la définition classique :

$$x_\tau = \sum_i 1\!\!1_{\tau = t_i} x_{t_i}$$

où les t_i constituent le support de la mesure spectrale discrète τ. Pour un temps d'arrêt général τ, on veut utiliser la Proposition IV.4 est approcher τ par une suite de temps d'arrêt discrets. Ce problème a été étudié dans [P-S] et ils obtiennent la convergence pour des processus de vecteurs de la forme $x_t = m_t \otimes y_t$, où $(m_t)_{t\geq 0}$ est une martingale complète dans Φ (i.e., $m_t = P_t m$ pour un $m \in \Phi$) et où $(y_t)_{t\geq 0}$ est un *processus dans le futur* (i.e., $y_t \in \Phi_{[t}$ pour tout t).

Dans [A-S] nous étendons ce résultat au cas où $(x_t)_{t\geq 0}$ est de la forme $x_t = z_t \otimes y_t$, où $(z_t)_{t\geq 0}$ est une quasimartingale d' Enchev sur Φ.

L'extension en elle-même est assez délicate, mais avant de voir l'intérêt qu'il y a à avoir obtenue une telle extension, il est intéressant de voir pourquoi les quasimartingales d'Enchev sont particulièrement adaptées à l'arrêt. Soit $z_t = \int_0^t \xi_s d\chi_s + \int_0^t h_s\, ds$, $t \in I\!R^+$, une quasimartingale d'Enchev.

Soit τ un temps d'arrêt fini. Le processus $(z_t)_{t\geq 0}$ est dit *τ-integrable* s'il satisfait

$$\int_0^\infty ||1\!\!1_{\tau > s} \xi_s||^2\, ds + \int_0^\infty ||1\!\!1_{\tau > s} h_s||\, ds < \infty.$$

Dans [A-S] nous montrons, en passant à la limite sur des temps d'arrêts discrets qui approchent τ, que si $(z_t)_{t\geq 0}$ est τ-intégrable alors

$$z_\tau = \int_0^\infty 1\!\!1_{\tau > s}\, \xi_s\, d\chi_s + \int_0^\infty 1\!\!1_{\tau > s}\, h_s\, ds.$$

Ce qui est une formule somme toute assez naturelle par rapport à ce que l'on obtient en probabilités classiques.

La partie difficile est alors l'arrêt des processus de la forme $z_t \otimes y_t$, nous renvoyons à [A-S] pour les détails mais l'idée formelle est la suivante. Nous avons dit que Parthasarathy et Sinha ont montré dans [PS2] que les intégrales de la forme $\int \mathbb{1}_{\tau \in ds}[P_s m] \otimes y_s$ convergent toujours. C'est donc le cas de $\int \mathbb{1}_{\tau \in ds}[P_s z_\tau] \otimes y_s$ qui est égal à $\int \mathbb{1}_{\tau \in ds}[P_s \int \mathbb{1}_{\tau \in du}\, z_u] \otimes y_s$. Comme il est s-adapté (ou presque) l'opérateur $\mathbb{1}_{\tau \in ds}$ commute avec P_s, donc l'intégrale précédente vaut

$$\int [P_s \mathbb{1}_{\tau \in ds} \int \mathbb{1}_{\tau \in du}\, z_u] \otimes y_s.$$

Comme $\mathbb{1}_{\tau \in ds}\mathbb{1}_{\tau \in du}$ est égal à $\mathbb{1}_{u=s}\mathbb{1}_{\tau \in ds}$ on obtient $\int [P_s \mathbb{1}_{\tau \in ds} z_s] \otimes y_s$ c'est-à-dire,

$$\int \mathbb{1}_{\tau \in ds}\, z_s \otimes y_s.$$

D'où le résultat.

Ce qui est intéressant dans cette extension c'est son application à l'arrêt des processus d'opérateurs. En effet, si on se donne un processus d'opérateurs $(X_t)_{t \geq 0}$ et un temps d'arrêt τ on peut se demander comment définir X_τ. Quand τ est un temps d'arrêt discret on a déjà le choix entre trois définitions :

l'arrêt à gauche : $\tau \circ X = \sum_i \mathbb{1}_{\tau = t_i} X_{t_i}$

l'arrêt à droite : $X \circ \tau = \sum_i X_{t_i}\, \mathbb{1}_{\tau = t_i}$

l'arrêt bilatère : $\tau \circ X \circ \tau = \sum_i \mathbb{1}_{\tau = t_i}\, X_{t_i}\, \mathbb{1}_{\tau = t_i}$.

Comme précédement on veut ensuite passr à la limite sur une suite de temps d'arrêts discret qui convergent vers un τ. L'extension présentée ci-dessus donne une réponse satisfaisante au problème de l'arrêt à gauche et à celui de l'arrêt à droite.

Théorème IV.5 – *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté d'opérateurs sur Φ tel que pour tout $u \in \mathcal{M}$ le processus $(X_t\, \varepsilon(u_{t]}))_{t \geq 0}$ est une quasimartingale d'Enchev sur Φ. Soit τ un temps d'arrêt fini tel que, pour tout $u \in \mathcal{M}$, le processus $(X_t\, \varepsilon(u_{t]}))_{t \geq 0}$ soit τ-integrable. Alors l'arrêt à gauche $\tau \circ X$ converge fortement sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$.*

Tout vient du simple fait que si X_t est t-adapté alors $X_t\, \varepsilon(u) = (X_t\, \varepsilon(u_{t]})) \otimes \varepsilon(u_{[t})$ et donc le processus de vecteurs $(X_t\, \varepsilon(u))_{t \geq 0}$ est du type de ceux que l'on sait arreter grâce à l'extension de [A-S].

Mais le plus intéressant dans le théorème précédent c'est que la classe des processus d'opérateurs qui en vérifient les conditions est très large puisqu'elle contient tout les processus adaptés d'opérateurs qui admettent une représentation en intégrales stochastiques quantiques (Corollaire IV.3). On obtient le résultat suivant.

Corollaire IV.6 – *Soit*

$$X_t = \int_0^t H_s\, d\Lambda_s + \int_0^t K_s\, dA_s^\dagger + \int_0^t L_s\, dA_s + \int_0^t M_s\, ds$$

un processus adapté d'opérateurs qui admet une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur un espace cohérent $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. *Soit* τ *un temps d'arrêt fini sur* Φ *tel que*

$$\int_0^\infty 1\!\!1_{\tau>s} H_s\, d\Lambda_s + \int_0^\infty 1\!\!1_{\tau>s} K_s\, dA_s^\dagger + \int_0^\infty 1\!\!1_{\tau>s} L_s\, dA_s + \int_0^\infty 1\!\!1_{\tau>s} M_s\, ds \quad \text{(IV.1)}$$

soit bien défini sur $\mathcal{E}(\mathcal{M})$. *Alors l'arrêt à gauche* $\tau \circ X$ *converge fortement sur* $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ *et* $\tau \circ X$ *est donné par* (IV.1).

De plus, si le processus adjoint $(X_t^*)_{t\geq 0}$ *admet aussi une représentation intégrale, on a le même résultat pour l'arrêt à droite* $X \circ \tau$.

V. Processus de Markov forts quantiques

Nous résumons ici l'article [AP2] (on peut aussi consulter [AP1] qui en est un résumé). Cette partie est la seule qui ne se situe pas exclusivement dans le cadre de l'espace de Fock.

V.1 La construction de Bhat-Parthasarathy

Le point de départ de cet article est le travail de Bhat-Parthasarathy ([B-P]). Leur objectif était de définir, dans un cadre C^*-algébrique général, une extension quantique de la notion de processus de Markov.

Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre unitale d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H_0. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe d'applications complétement positives, contractives et unitales de $\mathcal{A}$ dans elle-même. Rappelons que *complètement positif* signifie

$$\sum_{i,j} X_i^* T_t(Y_i^* Y_j) X_j \geq 0$$

pour tout $X_i \in \mathcal{B}(H_0)$, $Y_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$.

Le résultat principal de [B-P] est une généralisation du théorème de construction de Kolmogorov.

Théorème V.1 – *Il existe un espace de Hilbert* H, *une famille croissante de projections* $(F_t)_{t\geq 0}$ *sur* H, *une famille de *-homomorphismes* $j_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H), t \geq 0$ *et un isomorphisme unitaire* V *de* H_0 *sur l'image de* F_0 *tels que :*

i) $j_t(I) = F_t$, *pour tout* $t \geq 0$*;*

ii) $F_s j_t(X) F_s = j_s(T_{t-s}(X))$ *pour tout* $s \leq t$, $X \in \mathcal{A}$

iii) $j_0(X)V = VX$ *pour tout* $X \in \mathcal{A}$;

(iv) *l'ensemble* $\{j_{t_1}(X_1)...j_{t_n}(X_n)Vu; t_1 > t_2 > \cdots > t_n \geq 0, X_i \in \mathcal{A}, i \in \{1,...,n\}, n \geq 1, u \in H_0\}$ *est total dans* H;

Un tel théorème d'existence peut être considéré comme l'extension non commutative du théorème de Kolmogorov de construction d'un processus de Markov à partir d'un semigroupe positif de contractions et d'une mesure initiale. Il donne la construction d'un processus de Markov quantique $(j_t)_{t\geq 0}$ dont le semigroupe est $(T_t)_{t\geq 0}$. On retrouve la notion classique de la façon suivante.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ l'espace filtré canonique d'un processus de Markov $(x_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, tel que donné par le théorème d'existence de Kolmogorov (si on s'est donné une distribution initiale). Soit H l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $\mathcal{A}$ l'*-algèbre des fonctions mesurables bornées sur $(E, \mathcal{E})$. Alors le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ détermine une famille de *-homomorphismes $j_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ par

$$[j_t(f)h](x) = f(x(t))\mathbb{E}[h(x)/\mathcal{F}_t].$$

Ici x est toute la trajectoire et $x(t)$ est sa valeur à l'instant t. Soit H_t l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ et F_t la projection orthogonale de H sur H_t. La propriété de Markov s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_t(\mathbb{1}) & = & F_t \\ F_s\, j_{t+s}(f) F_s & = & j_s(T_t f). \end{array} \right. \tag{V.1}$$

Ainsi, le quadruplet $\{H, (F_t)_{t\geq 0}, (j_t)_{t\geq 0} V\}$ satisfaisant les conditions i), ii) et iii) du Théorème V.1 peut être interprété comme un processus de Markov quantique, de semigroupe $(T_t)_{t\geq 0}$. La propriété iii) joue le rôle de propriété (faible) de Markov.

V.2 Processus de Markov forts quantiques

Dans [AP2], nous construisons la notion de processus de Markov quantiques qui ont la propriété *forte* de Markov.

Il nous faut définir une notion de temps d'arrêts dans ce contexte. Un temps d'arrêt τ sur H est une mesure spectrale sur $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ à valeurs dans l'ensemble des projecteurs orthogonaux de H et telle que

$$\mathbb{1}_{\tau\leq t}\, j_u(X) = j_u(X)\mathbb{1}_{\tau\leq t} \quad \text{pour tout } u \geq t,\ X \in \mathcal{A}. \tag{V.2}$$

La relation de commutation (V.2) remplace la condition d'adaptation des temps d'arrêts usuels. Dans le cas classique cette condition signifie exactement que l'événement $(\tau \leq t)$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{F}_t$ engendrée par le processus de Markov jusqu'à l'instant t. Dans le contexte général, cette condition de commutation indique que $\mathbb{1}_{\tau\leq t}$ n'interfère pas avec les trajectoires futures du processus de Markov.

Pour pouvoir parler de processus de Markov fort dans ce contexte il faut être capable de définir j_τ pour un temps d'arrêt τ. Comme dans la sous-section précédente, le problème consiste à savoir passer à la limite sur des expressions du type

$$\sum_i \mathbb{1}_{\tau\in[t_i,t_{i+1}[} j_{t_{i+1}}(X)\psi.$$

On dit que $(j_t)_{t\geq 0}$ est un *processus de Markov fort* si la limite $j_\tau(X)\psi$ des expressions ci-dessus existe et est indépendante de la suite de subdivisions choisie. Nous donnerons plus loin des conditions suffisantes pour que cette propriété ait lieu.

Dans [AP2], nous montrons tout d'abord que "l'arrété" F_τ de la "filtration" $(F_t)_{t\geq 0}$ peut être défini dans tous les cas. Le résultat qui suit justifie alors la dénomination de processus de Markov *fort*.

Théorème V.2 (Propriété forte de Markov) – *Soit $(j_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov fort. Soit τ un temps d'arrêt. L'application $\psi \mapsto j_\tau(X)\psi$ définit une application linéaire bornée qui s'étend en un opérateur borné $j_\tau(X)$ sur H dont la norme est majorée par $\|X\|$. L'application $X \mapsto j_\tau(X)$ s'étend en un *-homomorphisme (contractif) sur $\mathcal{A}$.*

Pour tout temps d'arrêt τ, tout $X \in \mathcal{A}$, tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$F_\tau j_{\tau+t}(X)F_\tau = j_\tau(T_t(X)).$$

Nous souhaitons maintenant avoir des conditions raisonables pour qu'un processus de Markov quantique $(j_t)_{t\geq 0}$ soit fort.

On remarque que pour tout $\psi \in H$, tout $X \in \mathcal{A}$, le processus de vecteur $(j_t(X)\psi)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_t)_{t\geq 0}$. On pense donc tout naturellement à nouveau aux quasimartingales d'Enchev. Si le processus adapté $(j_t(X)\psi)_{t\geq 0}$ est une quasimartingale d'Enchev, on saura l'arrêter. On dit donc qu'un processus de markov quantique $(j_t)_{t\geq 0}$ *satisfait la condition d'Enchev* s'il existe un sous-espace dense $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ et un sous-espace dense $\widetilde{H}$ de H tels que pour tout $\psi \in \widetilde{H}$, tout $X \in \mathcal{A}_0$, tout $T \geq 0$ il existe une fonction localement intégrable g telle que, pour tout $s < t < T$ on ait

$$||F_s j_t(X)\psi - j_s(X)\psi|| \leq \int_s^t g(u)\, du.$$

Théorème V.3 – *Un processus de markov quantique qui satisfait la condition d'Enchev est un processus de Markov fort (quantique).*

Nous allons donner une condition suffisante portant sur le générateur $\mathcal{L}$ du semigroupe $(T_t)_{t\geq 0}$, mais auparavant il faut faire une remarque qui montre l'utilité du critère ci-dessus. Dans [E-H] ont été considérés ce que l'on appelle les *flots d'Evans-Hudson* ; c'est-à-dire les solutions de certaines équations différentielles stochastiques quantiques sur l'espace de Fock Φ. On sait que les solutions de ces équations sont des processus de Markov quantiques. Mais comme les flots d'Evans-Hudson sont constitués uniquement d'intégrales stochastiques quantiques dans Φ, on a par le Théorème V.3 et le Corollaire IV.3 que *tout flot d'Evans-Hudson qui est minimal* (i.e. qu'il engendre l'espace de Fock comme la condition iv) du Théorème V.1) *est un processus de Markov fort quantique.*

Un processus de Markov quantique $(j_t)_{t\geq 0}$ de semigroupe $(T_t)_{t\geq 0}$ et de générateur $\mathcal{L}$ est dit *satisfaire la condition S* s'il existe un sous-espace dense $\mathcal{A}_0 \subset \mathrm{Dom}\,\mathcal{L}$ tel que :

i) $\mathcal{A}_0$ soit une algèbre,

ii) $\mathcal{A}_0$ soit stable par $(T_t)_{t\geq 0}$

iii) pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{A}_0$ l'application $t \mapsto \mathcal{L}(XT_t(Y)Z)$ est localement bornée en norme.

Par exemple, si le générateur $\mathcal{L}$ est borné alors $(j_t)_{t\geq 0}$ satisfait la condition S.

Théorème V.4 – *Si un processus de Markov quantique satisfait la condition S alors il satisfait la condition d'Enchev et c'est par conséquent une processus de markov fort quantique.*

Dans [AP2], de nombreux développements sont donnés à partir de ces résultats. En particulier on montre qu'un processus de markov qui satisfait la condition d'Enchev vérifie aussi une formule de localisation du type de la formule classique de Dynkin :

$$F_0 j_\tau(X) F_0 \psi = j_0(X)\psi + F_0 \int_0^\infty \mathbb{1}_{\tau > s} j_s(\mathcal{L}(X))\, ds F_0 \psi.$$

A partir de là nous développons une solution au problème de Dirichlet non commutatif sur $\mathcal{A}$ pour le générateur $\mathcal{L}$ par la méthode usuelle : arrêter le processus de markov $(j_t)_{t\geq 0}$ à son “premier temps de sortie” du domaine en question. Nous ne développons pas cette partie ici car il s'avère qu'elle recouvre, dans un contexte différent, en grande partie les travaux de J.-L. Sauvageot : [Sa1], [Sa2] et [Sa3].

VI. L'espace de Fock est quasi-continu à gauche

Cette section résume les résultats de la prépublication [At10]. Il s'agit d'une étude plus approfondie des temps d'arrêts sur l'espace de Fock.

Pour un temps d'arrêt (quantique) τ sur Φ nous montrons qu'il est toujours possible de définir la valeur P_τ des projections $(P_t)_{t\geq 0}$ à l'instant t, c'est-à-dire que les séries

$$\sum_i \mathbb{1}_{\tau \in]t_i, t_{i+1}]} P_{t_i}$$

convergent vers un projecteur orthogonal P_τ.

On note $\Phi_{\tau]}$ l'image de P_τ dans Φ ; cet espace joue le rôle "d'espace de Fock avant l'instant τ". Ce qui est assez agréable c'est que l'espace $\Phi_{\tau]}$ admet une caractérisation équivalente qui est plus proche de la définition probabiliste classique.

Proposition VI.1 – *Pour tout temps d'arrêt τ on a*

$$\Phi_\tau = \{f \in \Phi;\ 1\!\!1_{\tau\leq t} f \in \Phi_{t]} \text{ pour tout } t\} = \{f \in \Phi;\ 1\!\!1_{\tau< t} f \in \Phi_{t]} \text{ pour tout } t\}.$$

En poursuivant l'analogie avec la théorie classique on définit l'espace $\Phi_{\tau-}$ comme étant la fermeture dans Φ de l'espace vectoriel engendré par $\{1\!\!1_{\tau>t} f;\ f \in \Phi_{t]}, t \in I\!R^+\}$.

Nous définissons aussi la notion de deux temps d'arrêts τ et τ' tels que $\tau < \tau'$ (définir $\tau \leq \tau'$ ne pose pas de difficultés, la notion d'inégalité stricte dans ce contexte est plus délicate), cela nous conduit naturellement à la définition des temps d'arrêts *prévisibles* quantique sur l'espace de Fock ; c'est-à-dire les temps d'arrêts τ tels qu'il existe une suite $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots < \tau$ qui converge vers τ.

Le résultat principal est alors le suivant.

Théorème VI.1 – *L'espace de Fock est quasi-continu à gauche ; c'est-à-dire que pour tout temps d'arrêt prévisible (quantique) τ on a $\Phi_\tau = \Phi_{\tau-}$.*

Le titre de l'article en question est justifié par le théorème ci-dessus. En effet, si on considère une interprétation probabiliste de l'espace de Fock (cf Troisième partie) provenant d'une martingale normale $(x_t)_{t\geq 0}$ qui possède la propriété de représentation prévisible, il est facile de voir que cette martingale x est forcement quasi-continue à gauche (au sens probabiliste usuel). Le théorème précédent prouve que cette propriété est en fait intrinsèque à l'espace de Fock et n'a rien à voir avec les probabilités.

Troisième partie :
CALCUL STOCHASTIQUE CLASSIQUE

VII. Extension et unification du calcul stochastique classique

VII.1 Interprétations probabilistes de l'espace de Fock

On cosidère une martingale (classique) $(x_t)_{t\geq 0}$ sur son espace probabilisé canonique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Cette martingale est dite *normale* si le processus $(x_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est encore une martingale ; soit encore, si le crochet oblique $(\langle x, x\rangle_t)_{t\geq 0}$ vérifie $\langle x, x\rangle_t = t$ pour tout t.

Une martingale normale $(x_t)_{t\geq 0}$ possède la *propriété de représentation prévisible* si toute variable aléatoire f dans $L^2(\Omega)$ admet une représentation sous la forme de son espérance plus une intégrale stochastique par rapport à $(x_t)_{t\geq 0}$:

$$f = \mathbb{E}[f] + \int_0^\infty \xi_s \, dx_s.$$

Pour une martingale normale $(x_t)_{t\geq 0}$ il est possible de définir des intégrales stochastiques itérées ([Me4]) de la forme

$$\int_{0<t_1<\ldots<t_n<\infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) \, dx_{t_1} \, \ldots \, dx_{t_n}$$

pour des fonctions (déterministes) f_n de carré intégrable sur le simplexe croissant $\Sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n ; 0 < t_1 < \ldots < t_n\}$. On définit l'*espace chaotique* de $(x_t)_{t\geq 0}$, noté $CS(x)$, comme étant l'espace des variables aléatoires f de $L^2(\Omega)$ qui s'écrivent sous la forme d'une série de telles intégrales itérées :

$$f = \mathbb{E}[f] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0<t_1<\ldots<t_n<\infty} f_n(t_1, \ldots, t_n) \, dx_{t_1} \, \ldots \, dx_{t_n}. \tag{VII.1}$$

La décomposition de f sous la forme d'une telle série est appelée le *développement chaotique* de f. On rappelle que deux intégrales itérées qui ne sont pas du même ordre d'itération sont orthogonales dans $L^2(\Omega)$; par conséquent la norme de f est égale à

$$||f||^2 = |\mathbb{E}[f]|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0<t_1<\ldots<t_n<\infty} |f_n(t_1, \ldots, t_n)|^2 \, dt_1 \, \ldots \, dt_n.$$

Quand $CS(x)$ est tout $L^2(\Omega)$ on dit que $(x_t)_{t\geq 0}$ possède la *propriété de représentation chaotique.*

Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ une martingale normale qui possède la propriété de représentation prévisible. La différence $[x,x]_t - \langle x,x\rangle_t$ entre le crochet droit de x est son crochet oblique est toujours une martingale. Donc, par la propriété de représentation prévisible (si x_t admet un moment d'ordre 4), il existe un processus prévisible $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ de $L^2(\Omega)$ tel que

$$[x,x]_t - \langle x,x\rangle_t = \int_0^t \Psi_s\, dx_s.$$

En d'autres mots

$$d[x,x]_t = dt + \Psi_t\, dx_t.$$

Cette équation s'appelle *équation de structure* de $(x_t)_{t\geq 0}$ (cf [Eme]). Ces équations sont très utiles pour identifier de nombreuses propriétés du processus $(x_t)_{t\geq 0}$. Suivant la forme de $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ on retrouve plusieurs contextes bien connus (cf [Eme]) :

si $\Psi_t \equiv 0$ pour tout t alors $(x_t)_{t\geq 0}$ est le mouvement brownien,

si $\Psi_t \equiv -1$ pour tout t alors $(x_t)_{t\geq 0}$ est le processus de Poisson compensé,

si $\Psi_t = \beta x_{t-}$ alors $(x_t)_{t\geq 0}$ est la martingale d'Azéma de coefficient β.

Les deux premiers cas ainsi que le troisième pour $\beta \in [-2,0]$ possèdent la propriété de représentation chaotique ([Eme]).

Quelque soit le cas que nous considérons, il existe une relation très forte entre les martingales normales qui possède la propriété de représentation prévisible et l'espace de Fock. En effet, une fonction f_n de carré intégrable sur le simplexe croissant Σ_n peut être vue comme une fonction *symétrique* de carré intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^n$, c'est-à-dire un élément de $L^2(\mathbb{R}^+)^{\odot n}$. Donc l'espace chaotique $CS(x)$ de x est isomorphe à $\oplus_n L^2(\mathbb{R}^+)^{\odot n}$ c'est-à-dire, à l'espace de Fock symétrique $\Phi = \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+))$. L'isomorphisme $J : CS(x) \to \Phi = L^2(\mathcal{P})$ est donné par

$$[Jf](\sigma) = f_n(t_1,\ldots,t_n) \qquad \big([Jf](\emptyset) = \mathbb{E}[f]\big)$$

où $\sigma = \{t_1 < \ldots < t_n\} \in \mathcal{P}$ et où f a son développement chaotique donné par (VII.1). Notez que cet isomorphisme J dépend de la martingale $(x_t)_{t\geq 0}$.

C'est la raison pour laquelle $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P, (x_t)_{t\geq 0}, CS(x)\big)$ (ou simplement $(x_t)_{t\geq 0}$) est appelé *une interprétation probabiliste* de l'espace de Fock Φ.

VII.2 Interprétation du calcul d'Ito

Soit $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P, (x_t)_{t\geq 0}, CS(x)\big)$ une interprétation probabiliste de l'espace de Fock. Tous les opérateurs P_t, D_t, ∇_t, les intégrales de Skorohod et d'Ito sur Φ, tels que décrits dans la section I.2, admettent une interprétation sur $L^2(\Omega)$ comme des opérateurs probabilistes bien connus. Soit $J : CS(x) \to \Phi$ l'isomorphisme entre $CS(x)$ et Φ.

Tout d'abord, on a $P_t = J \circ E_t \circ J^{-1}$ où E_t est l'opérateur d'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_t]$; de fait, l'espace $\Phi_{t]} = \mathrm{Im} P_t$ est isomorphe à $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \cap CS(x)$.

Soit f une variable aléatoire dans $CS(x)$. On sait qu'il existe un processus prévisible $(\xi_t(f))_{t\geq 0}$ dans $L^2(\Omega)$ tel que $f = E[f] + \int_0^\infty \xi_t(f)\, dx_t$. On peut voir ξ_t comme un opérateur linéaire, presque partout (en t) défini, sur $L^2(\Omega)$. De ce point de vue ξ_t n'est rien d'autre que l'interprétation probabiliste de l'opérateur D_t ; c'est-à-dire $D_t = J \circ \xi_t \circ J^{-1}$.

On peut se demander alors quelle est l'interprétation probabiliste de l'opérateur ∇_t. Dans l'interprétation brownienne c'est le gradient de Malliavin, ou densité de dérivée stochastique. J'entends par là que, si h est un élément de l'espace de Cameron-Martin $H^1(I\!R^+)$, si ∇_h est l'opérateur de dérivation le long de h sur l'espace de Wiener, alors $\nabla_h = \int_0^\infty h(s)\nabla_s\, ds$ (see [N-Z]).

Donc l'opérateur $\mathcal{S}$, qui est l'adjoint de $(\nabla_t)_{t\geq 0}$ (cf [AL2] par exemple), est interprété sur l'espace de Wiener comme l'opérateur d'intégrale de Skorohod (voir [G-T], [Sko]).

L'opérateur d'intégrale d'Ito, correspond dans toutes les interprétations probabilistes à l'intégrale d'Ito par rapport à la martingale $(x_t)_{t\geq 0}$.

Le processus de vecteurs $(\chi_t)_{t\geq 0}$ dans Φ, par rapport auquel l'intégrale d'Ito sur l'espace de fock est une vraie intégrale, s'interprète sur $L^2(\Omega)$ comme la martingale normale $(x_t)_{t\geq 0}$ elle-même : $Jx_t = \chi_t$.

Le Théorème I.3, quand on l'interprète sur $L^2(\Omega)$, exprime seulement la propriété de représentation prévisible de $(x_t)_{t\geq 0}$ et la formule d'isométrie pour l'intégrale d'Ito.

la propriété $D_t = P_t\nabla_t$ est la retranscription sur l'espace de Fock de la formule de Clark ([Cla]).

Ainsi, tous les opérateurs présentés dans la section I.2 peuvent être interprétés comme des opérateurs bien connus provenant du calcul stochastique quantique. En fait, il est plus juste de penser en sens inverse. Des opérations probabilistes telles que l'intégrale d'Ito, de Skorohod, la représentation prévisible, etc ... peuvent être exprimées en termes seulement de la décomposition chaotique des variables aléatoires. Elles n'utilisent aucune propriété spécifique de la martingale normale x exceptées le propriété de représentation chaotique et la formule d'isométrie. Elles peuvent donc être traduites de manière intrinsèque dans l'espace de Fock. C'est ce que nous avons fait.

VII.3 Extension du calcul stochastique classique

Dans la section I nous avons développé un calcul stochastique quantique sur l'espace de Fock Φ. Nous avons développé les notions de processus adaptés, intégrales stochastiques, semimartingales, crochets droit et oblique, etc... dans le contexte de l'espace de Fock. Nous allons voir que ces notions sont des extensions non commutatives des notions classiques correspondantes et qu'elles unifient les différentes interprétations probabilistes de l'espace de Φ.

Il y a deux ingrédient qui font le lien entre calcul stochastique classique et quantique. Le premier est que les variables aléatoires usuelles dans une interprétation probabiliste sont des opérateurs particulier sur l'espace de Fock. En effet, soit $(x_t)_{t\geq 0}$ interprétation probabiliste de Φ. Soit $f$une variable aléatoire dans $CS(x)$. Alors f définit un opérateur auto-adjoint $\mathfrak{M}_f$ sur $CS(x)$: l' *opérateur de multiplication* par f défini par

$$\begin{array}{rcccc} \mathfrak{M}_f & : & \operatorname{Dom}\mathfrak{M}_f \subset CS(x) & \longrightarrow & CS(x) \\ & & g & \longmapsto & fg \end{array}$$

avec $\operatorname{Dom}\mathfrak{M}_f = \{g \in CS(x); fg \in CS(x)\}$. Par l'isomorphisme $J : CS(x) \longrightarrow \Phi$ l'opérateur $\mathfrak{M}_f$ devient un opérateur sur Φ : pour tout $f \in \Phi$ on définit l'opérateur

$$\begin{array}{rcccc} \mathfrak{M}_f & : & \operatorname{Dom}\mathfrak{M}_f \subset \Phi & \longrightarrow & \Phi \\ & & g & \longmapsto & J[(J^{-1}f)\,(J^{-1}g)] \end{array}$$

où $\operatorname{Dom}\mathfrak{M}_f = \{g \in \Phi; (J^{-1}f)\,(J^{-1}g) \in CS(x)\}$.

Le deuxième ingrédient est l'interprétation A-M du calcul stochastique quantique ; c'est le point de vue le plus probabiliste sur le calcul stochastique quantique.

Théorème VII.1 ([At9]) – *Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ une interprétation probabiliste de Φ. Soit $d[x,x]_t = dt + \Psi_t\,dx_t$ son équation de structure. Soit f un élément de Φ. Alors l'opérateur $\mathfrak{M}_f$ sur Φ admet une représentation en intégrales stochastiques quantiques sur* $\operatorname{Dom}\mathfrak{M}_f$ *:*

$$\mathfrak{M}_f = \mathbb{E}[f]I + \int_0^\infty \mathfrak{M}_{D_s f}\,(dA_s^\dagger + dA_s) + \int_0^\infty \mathfrak{M}_{D_s f}\,\mathfrak{M}_{\Psi_s}\,d\Lambda_s. \qquad \text{(VII.2)}$$

En particulier on a que si $(x_t)_{t\geq 0}$ est une interprétation probabiliste de Φ, de coefficient $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ dans son équation de structure, alors

$$d\mathfrak{M}_{x_t} = dA_t^\dagger + dA_t + \mathfrak{M}_{\Psi_t}\,d\Lambda_t.$$

On retrouve ainsi que le mouvement brownien est représenté dans Φ par $A_t^\dagger + A_t$; le processus de Poisson compensé par $A_t^\dagger + A_t + \Lambda_t$; la martingale d'Azéma de coefficient β est l'unique solution de $dX_t = dA_t^\dagger + dA_t + \beta X_t\,d\Lambda_t$.

Proposition VII.2 ([At5]) – *Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ une interprétation probabiliste de l'espace de Fock Φ. Soient $(z_t)_{t\geq 0}$ et $(y_t)_{t\geq 0}$ deux semimartingales dans cette interprétation. On suppose que les processus d'opérateurs $(\mathfrak{M}_{z_t})_{t\geq 0}$ et $(\mathfrak{M}_{y_t})_{t\geq 0}$sont des éléments de l'espace $\mathcal{S}'$ défini en section II. Alors le crochet droit quantique (resp. le crochet oblique quantique) de $\mathfrak{M}_z$ et $\mathfrak{M}_y$ est l'opérateur de multiplication par le crochet droit classique (resp. crochet oblique classique) de z et y ; c'est-à-dire*

$$[\mathfrak{M}_z, \mathfrak{M}_y]_t = \mathfrak{M}_{[z,y]_t} \qquad et \qquad \langle \mathfrak{M}_z, \mathfrak{M}_y \rangle_t = \mathfrak{M}_{\langle z,y \rangle_t}.$$

Nous terminons cette sous-section par une remarque intéressante qui fait le lien entre certains opérateurs naturels du calcul stochastique classique et les intégrales stochastiques quantiques. On trouvera les détails dans [A-M].

Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ une interprétation probabiliste de Φ. Soit $\lambda \in I\!\!R$. Soit $(h_t)_{t\geq 0}$ un processus prévisible borné. Soit $(k_t)_{t\geq 0}$un processus de la forme $k_t = \int_0^t p_s\, ds$, $t \in I\!\!R^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $(m_t)_{t\geq 0}$ et $(n_t)_{t\geq 0}$ des martingales complètes de représentation prévisible $m_t = c + \int_0^t \mu_s\, dx_s$ et $n_t = c' + \int_0^t \nu_s\, dx_s$ où les variables aléatoires μ_s et $\nu_s$sont bornées.

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ les cinq opérateurs de base suivants :

$$
\begin{array}{cccll}
E_\lambda & : & f & \longmapsto & \lambda I\!\!E[f] \\
I_h & : & f & \longmapsto & \int_0^\infty h_s\, df_s \\
J_n & : & f & \longmapsto & \int_0^\infty f_s\, dn_s \\
T_k & : & f & \longmapsto & \int_0^\infty f_s\, dk_s \\
C_m & : & f & \longmapsto & \langle\, f\,,\, m\,\rangle_\infty,
\end{array}
$$

où $(f_t)_{t\geq 0}$est le processus $(P_t f)_{t\geq 0}$.

Proposition VII.3 – *L'opérateur $T = E_\lambda + I_h + J_n + T_k + C_m$ admet une représentation intégrale sur $L^\infty(\Omega)$:*

$$T = \lambda I + \int_0^\infty (\mathfrak{M}_{h_s} - T_s)\, d\Lambda_s + \int_0^\infty \mathfrak{M}_{\nu_s}\, dA_s^+ + \int_0^\infty \mathfrak{M}_{\mu_s}\, dA_s^- + \int_0^\infty \mathfrak{M}_{p_s}\, ds$$

où $(T_t)_{t\geq 0}$ est la martingale d'opérateurs associée à T.

Ce résultant est intéressant parce qu'il donne une correspondance bijective entre quatre opérateurs probabilistes de base et les quatres types d'intégrales stochastiques quantiques. Cela donne une idée de quels genres d'opérations stochastiques les intégrales stochastiques quantiques sont des extensions non commutatives.

VII.4 Extension de la formule d'Ito classique

Nous avons vu dans la section II que la formule d'intégration par partie dans l'algèbre $\mathcal{S}$ est

$$X_t Y_t = \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t dX_s\, Y_s + [X, Y]_t. \tag{VII.3}$$

La formule classique est

$$x_t\, y_t = \int_0^t x_{s-}\, dy_s + \int_0^t y_{s-}\, dx_s + [x, y]_t. \tag{VII.4}$$

La différence entre les deux semble résider dans la présence de x_{s-} dans la formule classique au lieu du X_s de la formule quantique.

Il est montré dans [At5] que si X et Y sont des opérateurs de multiplication par des semimartingales classiques, alors en appliquant l'isomorphisme J^{-1} à (VII.3) on obtient (VII.4). La démonstration de ce fait est basée sur une formulation précise de l'équivalence entre espace de Fock et interprétation probabiliste, ainsi que sur la propriété de quasi-continuité à gauche des interprétations probabilistes.

On a même mieux : la formule d'Ito fonctionnelle de Vincent-Smith (Théorème II.7) coïncide exactement avec la formule d'Ito usuelle pour les fonctions C^{2+}. La démonstration est dans [V-S] (on peut la retrouver un peu simplifiée dans [At9]).

VIII Représentation des endomorphismes de l'espace de Wiener

Dans cette section nous présentons les résultats de [At2] ainsi que leur extensions dans [At6] et [AE3].

Le problème consiste à regarder les transformations de l'espace de Wiener qui transforment le mouvement brownien canonique en un autre mouvement brownien. Dans certains cas nous sommes capable d'avoir caractérisation algébrique complète de ces transformations. Cela est obtenu à l'aide du calcul stochastique quantique.

VIII.1 Les endomorphismes qui préservent les martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de Wiener, soit $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien canonique, soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle, soit E_t l'opérateur d'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_t]$, $t \in \mathbb{R}^+$. Une application mesurable $\widetilde{T} \ : \ \Omega \longrightarrow \Omega$ est un *endomorphisme* si elle préserve la mesure P. Dans ce cas, si nous définissons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la variable aléatoire $\widetilde{W_t}(\omega) = W_t(\widetilde{T}\omega)$, le processus $(\widetilde{W_t})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Un endomorphisme $\widetilde{T}$ sera dit *préserver les martingales* si $\widetilde{W}$ est un mouvement brownien pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dans ce cas, $\widetilde{W}$ est une martingale de crochet t, elle admet donc une représentation prévisible de la forme $\widetilde{W_t} = \int_0^t k_s\, dW_s$, où $(k_t)_{t\geq 0}$ est un processus prévisible tel que $k_t^2(\omega) = 1$, pour presque tout (t, ω). Il est clair que $\widetilde{T}$ est entièrement déterminé par k.

On peut définir sur Φ l'opérateur linéaire $T \ : f \ \longmapsto f \circ \widetilde{T}$. Cet opérateur vérifie :

i) T est une isométrie (T est unitaire ssi $\widetilde{T}$ admet une version inversible)

ii) $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})(Tg)$, pour tous $f, g \in \Phi$ tels que $fg \in \Phi$.

La propriété "$\widetilde{T}$ préserve les martingales" est quant à elle équivalente à

iii) $T\,\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t\,T$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Il s'avère en fait que la condition i) devient superflue car elle est une conséquence simple des conditions ii) et iii) (cf [At4]).

A priori, il n'est pas clair que ces propriétés caractérisent complètement les opérateurs associés à un endomorphisme préservant les martingales. Si on remplace la condition iii) par l'unitarité de T, on caractérise alors tous les endomorphismes *inversibles* qui préservent les martingales (par [Cho] et la caractérisation de la propriété de préserver les martingales). Dans le cas où l'opérateur est seulement isométrique ces conditions n'assurent pas, a priori, qu'il provient d'une transformation de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui préserve la mesure.

Dans [At3] nous prouvons le résultat suivant.

Théorème VIII.1 – *Soit T un opérateur borné sur Φ. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $T\,\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t\,T$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$

ii) *Il existe un processus adapté* $(H_t)_{t\geq 0}$ *d'opérateurs bornés, et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *tels que*

$$T = \lambda I + \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s, \quad \textit{sur tout } \Phi.$$

Ce théorème est en fait une conséquence de ce que la martingale associée à un opérateur borné T qui commute avec les E_t est un élément de l'algèbre $\mathcal{S}$.

Ce résultat est très satisfaisant car il nous assure que les opérateurs en question ont tous une représentation intégrale. On peut donc travailler avec cette représentation et les équations A-M.

Théorème VIII.2 – *Soit T un opérateur borné sur Φ, qui commute avec les $\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$ et tel que $T1 = 1$. Donc, $T = I + \int_0^\infty H_s\, d\Lambda_s$, sur tout Φ. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ la martingale qui lui est associée. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})(Tg)$, *pour tous* $f, g \in \Phi$ *tels que* $fg \in \Phi$.

ii) *Pour presque tout* t, $H_t = (H_t 1)T_t$ *et* $H_t 1$ *est à valeurs dans* $\{0, -2\}$.

iii) *Pour presque tout* t, *pour tous* f, g *dans* Φ, *tels que* fg *soit dans* Φ,

$$H_t(\overline{f}g) = -\frac{1}{2}(\overline{H_t f})(H_t g),$$

et, pour presque tout $s \leq t$,

$$H_t W_s = (H_t 1)\int_0^s (1 + H_u 1)\, dW_u.$$

Nous savons donc maintenant caractériser tous les opérateurs bornés T non nuls vérifiant :

i) $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})(Tg)$, pour tous $f, g \in \Phi$ tels que $fg \in \Phi$

ii) $T\,\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t\,T, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

(iii) T est une isométrie.)

Mais, comme nous l'avons remarqué précédement ces propriétés n'impliquent pas, a priori, que T est l'opérateur associé à un endomorphisme de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui préserve les martingales.

Le théorème qui suit prouve pourtant qu'ici les deux premières conditions sont suffisantes pour conclure que l'opérateur considéré provient d'une transformation de l'espace de Wiener qui préserve la mesure. C'est le calcul stochastique non commutatif qui donne un procédé constructif pour obtenir l'endomorphisme associé. Résultat qui n'apparaît pas évident sans cet outil.

Théorème VIII.3 – *Soit T un opérateur borné, non nul, de Φ dans Φ, défini partout. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *T est l'isométrie associée à un endomorphisme $\widetilde{T}$ de l'espace de Wiener qui préserve les martingales.*

ii) *L'opérateur T commute avec les espérances conditionnelles $\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$ et vérifie $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})(Tg)$ pour tous f, g dans Φ tels que fg soit aussi dans Φ.*

Quand ces conditions sont vérifiées, l'image $\widetilde{W}$ du mouvement brownien W par $\widetilde{T}$ est donnée par $\widetilde{W}_t = \int_0^t k_s\,dW_s$, où le processus prévisible $(k_t)_{t\geq 0}$ vérifie $k_t = 1 + H_t 1$, pour presque tout (t, ω).

VIII.3 Des endomorphismes plus généraux

Les techniques développées dans [At2] permettent de considérer des endomorphismes bien plus généraux.

Soit $\widetilde{T}$ un endomorphisme de l'espace de Wiener. Soit $(\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien, image de $(W_t)_{t\geq 0}$ par $\widetilde{T}$. On dit que l'endomorphisme $\widetilde{T}$ est *adapté* si le processus $(\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(W_t)_{t\geq 0}$. Un endomorphisme adapté est *regulier* si le processus $(\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ admet une représentation sous la forme

$$\widetilde{W}_t = \widetilde{T} W_t = \int_0^t k_s\,dW_s + \int_0^t h_s\,ds.$$

Soit T l'opérateur de Φ dans Φ associé à un endomorphisme adapté $\widetilde{T}$ c'est-à-dire l'opérateur défini par $Tf = f \circ \widetilde{T}$, $f \in \Phi$. L'opérateur T a les propriétés suivantes :

i) c'est une isométrie

ii) $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})\,(Tg)$, pour $f, g \in \Phi$ tels que $fg \in \Phi$

iii) il préserve les espaces $\operatorname{Im} P_t$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ (ou de façon équivalente $T\,P_t = P_t\,T\,P_t$, $t \in \mathbb{R}^+$).

Les résultats et les démonstrations sont presque les mêmes que dans le cas des endomorphismes qui préservent les martingales. Une différence réside dans le fait que la propriété i) d'être une isométrie n'est plus une conséquence de ii) et iii). De plus, un opérateur borné satisfaisant iii) n'est plus forcement représentable en intégrales stochastiques quantiques (un contre-exemple est donné dans [At6]). On obtient tout de même les caractérisations suivantes.

Théorème VIII.4 – *Soit T un opérateur borné non nul de Φ dans Φ. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *T est l'opérateur associé à un endomorphisme régulier de l'espace de Wiener.*

ii) *L'opérateur T admet représentation intégrale sur tout Φ, il preserve les espaces $\mathrm{Im}\,\mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$, c'est une isometrie de Φ et il satisfait $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})(Tg)$ pour tous $f, g \in \Phi$ tels que $fg \in \Phi$.*

iii) *L'opérateur T admet une représentation intégrale sur tout Φ de la forme*

$$T = I + \int_0^\infty H_s^\circ \, d\Lambda_s + \int_0^\infty H_s^- \, dA_s$$

où :

- $H_t^\varepsilon = \mathfrak{M}_{H_t^\varepsilon 1} \circ T_t$, *pour p.t. t, tout $\varepsilon \in \{\circ, -\}$,*
- $H_t^\circ 1$ *est à valeurs dans $\{0, -2\}$ pour p.t. t,*
- $(H_t^-)^* T_t = 0$ *pour p.t. t.*

Quand ces conditions sont satisfaites, l'endomorphisme régulier $\widetilde{T}$ associé à T est donné par

$$\widetilde{T} W_t = \int_0^t k_s \, dW_s + \int_0^t h_s \, ds$$

où $k_s = 1 + H_s^\circ 1$ et $l_s = H_s^- 1$.

Le nouveau type de condition $(H_t^-)^* T_t = 0$ correspond à dire que la variable aléatoire l_t est orthogonale à $\mathrm{Im}\, T_t$. C'est aussi la condition qui donne la propriété d'isométrie pour T.

Une autre conséquence de ce théorème est que les opérateurs associés à un endomorphisme régulier de l'espace de Wiener sont eux aussi toujours représentables en inégrales stochastiques quantiques sur tout l'espace de Fock.

Dans [AE3] nous considérons le même genre d'endomorphismes mais dans d'autres interprétations probabilistes que celle de l'espace de Wiener. Si x est une interprétation probabiliste de Φ de coefficient Ψ dans son équation de structure on dit que Ψ est *dans le premier chaos* de x si Ψ_t est de la forme $C + \int_0^t h(s)\, dx_s$ pour un $c \in \mathbb{C}$ et une fonction déterministe h sur $\mathbb{R}^+$. On dit que l'équation de structure possède la *propriété d'unicité en loi de ses solutions* si toutes les solutions de cette équation ont la même loi. Il y a quatre exemple connus qui rentre dans ce cadre : le mouvement brownien, le processus de Poisson compensé, les martingales d'Azéma et le cas où Ψ est une fonction déterministe du temps.

Théorème VIII.5 – *Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ une interprétation probabiliste de Φ d'équation de structure $d[x,x]_t = dt + \Psi_t\, dx_t$ avec Ψ dans le premier chaos de x. On suppose de plus que l'équation de structure possède la propriété d'unicité en loi de ses solutions. Soit T un opérateur borné non nul de Φ dans Φ. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *T est l'opérateur associé à un endomorphisme régulier de l'interprétation probabiliste $(x_t)_{t\geq 0}$.*

ii) *L'opérateur T admet une représentation intégrale sur tout Φ, il préserve les espaces $\operatorname{Im} \mathbb{E}_t$, $t \in \mathbb{R}^+$, c'est une isométrie de Φ et il satisfait $T(\overline{f}g) = (\overline{Tf})(Tg)$ pour tous $f, g \in \Phi$ tels que $fg \in \Phi$ (et où les produits de variables aléatoires sont ceux provenant de l'interprétation x).*

iii) *L'opérateur T admet une représentation intégrale sur tout Φ de la forme*

$$T = I + \int_0^\infty H_s^\circ \, d\Lambda_s + \int_0^\infty H_s^- \, dA_s$$

où :

- $H_t^\varepsilon = \mathfrak{M}_{H_t^\varepsilon 1} T_t$, *pour p.t. t, tout $\varepsilon \in \{\circ, -\}$,*
- $H_t^\circ 1$ *est à valeurs dans $\{0, -2\}$, pour presque tout t,*
- *si $k_t \stackrel{\text{def}}{=} 1 + H_t^\circ 1$ et $l_t \stackrel{\text{def}}{=} H_t^- 1$ alors $k_t^2 \Psi_t = k_t\, T\Psi_t$ et $k_t^2 = 1 + l_t\, T\Psi_t$,*
- $(H_t^-)^*\, T_t = 0$, *pour p.t. t.*

Quand ces conditions sont satisfaites, l'endomorphisme régulier $\widetilde{T}$ associé à T est donné par

$$\widetilde{T} W_t = \int_0^t k_s\, dW_s + \int_0^t h_s\, ds.$$

Notez les nouveaux types de conditions faisant intervenir le coefficient Ψ l'équation de structure : $k_t^2 \Psi_t = k_t T \Psi_t$ et $k_t^2 = 1 + l_t T \Psi_t$.

Dans le cas brownien on a $\Psi_t = 0$ et on retrouve le Théorème VIII.4.

Dans le cas du processus de Poisson compensé on a $\Psi_t = -1$ et donc $k_t^2 = k_t$ et $k_t^2 = 1 - l_t$. Par conséquent k_t est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et l_t est à valeurs dans $\{-1, 0\}$. Mais comme l_t est orthogonal à $\operatorname{Im} T_t$ on a en particulier $\mathbb{E}[l_t] = 0$. C'est impossible sauf si l_t est la variable aléatoire nulle. Dans ce cas k_t est indentiquement 1 et T est l'opérateur identité. Le seul endomorphisme régulier du processus de Poisson compensé est l'identité. Ce résultat n'a rien de surprenant, il est là seulement pour illustrer les résultats du théorème.

Dans le cas où Ψ est déterministe on obtient de même un mélange entre les cas brownien et le cas poissonien suivant que $\Psi_t = 0$ ou non.

Le cas difficile est le cas des martingales d'Azéma. Nous montrons dans [AE3] que si x est une martingale d'Azéma de coefficient β, la seule possibilité pour que le processus

$$x'_t = \int_0^t k_s\, dx_s + \int_0^t l_s\, ds$$

soit une martingale d'Azéma de coefficient β est que $l_t = 0$ pour p.t. t, $k_t^2 = 1$ pour p.t. t et que $t \mapsto k_t$ soit constant durant les excursions de x. La démonstration est purement probabiliste, elle utilise des propriétés fines des martingales d'Azéma. Puisque le Théorème VIII.5 donne une caractérisation complète de ces endomorphismes on devrait pouvoir en déduire une démonstration algébrique de ce résultat. Mais je n'y suis encore parvenu.

Autres travaux

Je veux conclure en disant un mot sur les articles dont je n'ai pas parlé ici.

La prépublication [At11] n'est pas encore complète ; j'ai préféré être prudent et ne pas en parler.

L'article [ABE] est purement probabiliste, ses motivations n'entrent pas naturellement dans le cadre de ce texte.

Les articles [AE1] et [AE2] sont aussi purement probabilistes dans leur contenu. Ils traitent néanmoins d'un problème qui n'est pas si éloigné du calcul stochastique quantique : les équations de structure vectorielles. On a vu l'importance des équations de structure dans le cadre des interprétations probabilistes de l'espace de Fock $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}))$. Si on travaille sur les espace de Fock multiples $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^N))$, pour N fini ou non, les interprétations probabilistes font appel à des martingales vectorielles (mouvement brownien multidimensionnel, ...). Les équations de structure liées à ces contextes multidimensionnels n'avaient jamais encore été étudiées. C'est l'objet de l'article [AE1]. L'article [AE2] lui fait suite et étudie les équivalents bidimensionnels des martingales d'Azéma.

RÉFÉRENCES

[At1] : S. Attal : "Problèmes d'unicité dans les représentations d'opérateurs sur l'espace de Fock", *Séminaire de Probabilités* XXVI, Springer Verlag, L.N.M. 1526 (1992), p. 619-632.

[At2] : S. Attal : "Représentations des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales", *Compte Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, t. 316, série I, (1993), p.739-744.

[At3] : S. Attal : "Characterizations of some operators on Fock space", *Quantum Probability and Related Topics* VIII, World Scientific (1993), p. 37-46.

[At4] : S. Attal : "Characterizations of operators commuting with some conditionnal expectations on multiple Fock space", *Quantum Probability and Related Topics* VIII, World Scientific (1993), p. 47-69.

[At5] : S. Attal : "An algebra of non commutative bounded semimartingales. Square and angle quantum brackets", *Journal of Functional Analysis* 124 (1994), p. 292-332.

[At6] : S. Attal : "*Semimartingales non commutatives et applications aux endomorphismes browniens*", Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg (1994).

[At7] : S. Attal : "Représentations des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales", *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 31 (1995), p. 467-484.

[At8] : S. Attal : "Non-commutative chaotic expansion of Hilbert-Schmidt operators on Fock space", *Communications in Mathematical Physics*, 175, (1996), p. 43-62.

[At9] : S. Attal : "Classical and quantum stochastic calculus" (article d'exposition), *Quantum Probability Communications* X, World scientific (à paraître).

[At10] : S. Attal : "Fock space is quasi left continuous", *prépublication de l'Institut Fourier*, Grenoble.

[At11] : S. Attal : "Quantum stochastic differential equations with time-dependant, adapted coefficients", *prépublication.*

[At12] : S. Attal : "A remarkable transformation of quantum adapted processes", *prépublication.*

[ABE] : S. Attal, C. Burdzi, M. Émery & Y. Hu : : "Sur quelques filtrations et transformations browniennes", *Séminaire de Probabilités* XXIX, Springer Verlag, L.N.M. 1613, (1995), p. 56-69.

[AE1] : S. Attal & M. Émery : "Equations de structure pour des martingales vectorielles", *Séminaire de Probabilités* XXVIII, Springer Verlag, L.N.M. 1583 (1994), p. 256-278.

[AE2] : S. Attal & M. Émery : "Martingales d'Azéma bidimensionnelles", *Asterisque 236, Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu* (1996), p. 9-21.

[AE3] : S. Attal & M. Émery : "Caractérisation de certains endomorphismes de martingales chaotiques", *prépublication.*

[AH1] : S. Attal & R.L. Hudson : "Series of iterated non-commutative stochastic integrals", *prépublication de l'Institut Fourier*, Grenoble.

[AH2] : S. Attal & R.L. Hudson : "Partial traces and supertraces of quantum stochastic evolutions", *prépublication.*

[AL1] : S. Attal & J.M. Lindsay : "Quantum Ito product formula : the combinatorial aspect", *Proocedings of the memorial conference for A. Frigerio*, (à paraître).

[AL2] : S. Attal & J.M. Lindsay : "Quantum stochastic calculus : a new formulation", *prépublication.*

[A-M] : S. Attal & P.-A. Meyer : "Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives", *Séminaire de Probabilités* XXVII, Springer Verlag, L.N.M. 1557 (1993), p. 312-327.

[AP1] : S. Attal & K.R. Parthasarathy : "Strong Markov processes and the Dirichlet problem on von Neumann algebras", *Stochastic Analysis and Applications*, (Proceedings of the Fifth Gregynog Symposium, Gregynog, Powys, 9–14 July 1995) editors: Ian M Davies, Aubrey Truman, K David Elworthy, p 53-75.

[AP2] : S. Attal & K.R. Parthasarathy : "Strong Markov processes and the Dirichlet problem on C^*-algebras", *prépublication de l'Institut Fourier*, Grenoble.

[A-S] : S. Attal & K.B. Sinha : "Stopping semimartingales on Fock space", *Quantum Probability Communications* X, World Scientific (à paraître).

[Bia] : P. Biane : "Calcul stochastique non commutatif", *Lectures on Probability Theory, Ecole d'Eté de Probabilités de St Flour* XXIII (1993), p. 1-96.

[Bel] : V.P. Belavkin : "A quantum non adapted Ito formula and non stationnary evolution in Fock scale", *Quant. Prob. and Rel. Topics* VI, World Scientific (1991), p. 137-180.

[Cho] : J.R. Choksy : "Unitary operators induced by measure preserving transformations", *Journ. Math. Mech.* 16 (1966), p. 83-100.

[Cla] : J.M.C. CLARK: "The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals", *Ann. Math. Stat.* 41 (1970), p. 1281-1295; 42 (1971), p. 1778.

[Eme] : M. EMERY : "On the Azéma martingales", *Sém. de Probabilités* XXIII, Springer Verlag L.N.M. 1372 (1989), p. 66-87.

[Enc] : O. ENCHEV : "Hilbert space valued quasimartingales", *Boll. Unione Mat. Ital.* 2 (1988), p. 19-39.

[E-H] : M.R. EVANS & R.L. HUDSON : "Multidimensional diffusions", *Quantum Prob. and Rel. Topics* III, Springer Verlag L.N.M. 1303 (1988), p. 69-88.

[G-T] : B. GAVEAU & P. TRAUBER : "L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel", *Journ. Funct. Anal.* 46 (1982), p 230-238.

[Gui] : A. GUICHARDET : "*Symmetric Hilbert spaces and related topics*", Springer Verlag, L.N.M. 261 (1970).

[Hud] : R.L. HUDSON : "The strong Markov property for canonical Wiener processes", *Journ. Func. Anal.* 34 (1979), p. 266-281.

[HLP] : R.L. HUDSON, J.M. LINDSAY & K.R. PARTHASARATHY : "Stochastic integral representation of some quantum martingales in Fock space", Warwick symp. on *Stochastic Differential Equations and Applications* (1984/85), Pitman Res. Notes on Math. 150 (1986), p 121-131.

[H-P] : R.L. HUDSON & K.R. PARTHASARATHY : "Quantum Ito's formula and stochastic evolutions", *Comm. Math. Phys.* 93 (1984), p 301-323.

[Lin] : J.M. LINDSAY : "Quantum and non-causal stochastic calculus", *Prob. Th. Rel. Fields* 97 (1993), p. 65-80.

[L-P] : J.M. LINDSAY & K.R. PARTHASARATHY : "Cohomology of power sets with applications in quantum probability", *Comm. in Math. Phys.* 124 (1989), p. 337-364.

[Ma1] : H. MAASSEN : "Kernel calculus II", in *Proc. ot the first world conference of the Bernouilli Society*, Tasjkent (1986).

[Ma2] : H. MAASSEN : "Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels", *Quant. Prob. and Rel. Topics* II, Springer Verlag L.N.M. 1136 (1985), p 361-374.

[Me1] : P.A. MEYER : "*Quantum Probability for probabilists*", 2nd edition, Springer Verlag L.N.M. 1538 (1995).

[Me2] : P.A. MEYER : "Eléments de probabilités quantiques", *Sém. de Probabilités* XX, Springer Verlag L.N.M. 1204 (1986), p 186-312.

[Me3] : P.A. Meyer : "Quasimartingales hilbertiennes", *Sém. de Probabilités* XXII, Springer L.N.M. 1321 (1988), p. 86-88.

[Me4] : P.A. Meyer : "Notions sur les intégrales multiples", *Sém. de Probabilités* X, Springer L.N.M. 511 (1976) p. 321-331.

[vNe] : J. von Neumann : "*Mathematical foundations of quantum mechanics*", Investigations in Physics 2, Princeton University Press, 1955.

[N-Z] : D. Nualart & M. Zakai : "Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus", *Prob. Th. Rel. Fields* 73 (1986), p 255-280.

[Par] : K.R. Parthasarathy : "*An introduction to quantum stochastic calculus*", Monographs in Mathematics, Birkhäuser (1992).

[P-S] : K.R. Parthasarathy & K.B. Sinha : "Stop times in Fock space stochastic calculus", *Prob. Th. Rel. Fields* 75 (1987), p. 317-349.

[Sa1] : J.-L. Sauvageot : "Markov quantum semigroups admit covariant Markov C^*-dilation", *Comm. Math. Phys.* 106 (1986), p. 91-103.

[Sa2] : J.-L. Sauvageot : "Le problème de Dirichlet dans les C^*-algèbres", *Journ. Funct. Anal.* 101/1 (1991), p. 50-73.

[Sa3] : J.-L. Sauvageot : "First exit time : a theory of stopping times in quantum processes", *Quantum Prob. and Applications* III, Springer Verlag L.N.M. 1303 (1988), p. 285-299.

[Sko] : A.V. Skorohod : "On a generalization of a stochastic integral", *Th. Prob. and Appl.* XX (1975), p 219-233.

[ViS] : G.F. Vincent-smith : "The Ito formula for quantum semimartingales", *prépublication.*