SERIES DE FOURIER

1. Coefficients de Fourier

La théorie des séries de Fourier permet la représentation de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodiques sous formes de séries trigonométriques.

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, on cherche une représentation de la forme

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.}$$

Notez que entre ces deux représentations le lien est forcément le suivant:

$$\boxed{c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \begin{array}{l} c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}, \end{array} \quad \begin{array}{l} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{array}}$$

Quand les sommes ci-dessus sont finies, on parle de polynômes trigonométriques:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.}$$

Dans le cas de fonctions f qui sont T-périodiques, on se ramène au cas 2π-périodique par

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \\ f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T} x\right) \end{array}}$$

Ce qui donne des représentations de la forme

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}}$$

avec $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$.

A partir de maintenant on ne considère plus que le cas 2π-périodique.

On a les calculs faciles suivants

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq -m \\ 2\pi, & n = -m \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbb{Z})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0 \\ 2\pi, & n = m = 0 \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbb{N}^*)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)\, dx = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*).$$

Voici pourquoi ces formules sont intéressantes. Si on se place dans le cas où les sommes sont finies, ou bien qu'on laisse de côté, pour le moment, de justifier les interversions Σ-$\int$, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx}\, dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, 2\pi\, \delta_{m-n} = 2\pi\, c_n.$$

Ainsi

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.}$$

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ($2\pi$-périodique et) intégrable sur $[0, 2\pi]$, on pose

$$\boxed{\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \,, \qquad n \in \mathbb{Z}}$$

On les appelle <u>coefficients de Fourier</u> de f.

Par le même genre de calcul on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \,, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

2. Propriétés des coefficients de Fourier.

Dans la suite, on note $\mathbb{T}$ l'intervalle $[0, 2\pi]$. On note $\mathcal{L}^q_{pa}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques, qui sont $\mathcal{L}^q$ sur $[0, 2\pi]$. On note $\|f\|_q$ pour $\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^q dx\right)^{1/q}$. C'est la norme q sur $[0, 2\pi]$ et pas sur $\mathbb{R}$! (où elle est infinie!)
De même on note $C^k_{pa}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et qui sont C^k sur $\mathbb{T}$.

<u>Proposition 1</u>

Si $f \in \mathcal{L}^1_{pa}(\mathbb{T})$, alors la suite $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée, avec

$$\|(\hat{f}(n))\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 .$$

Très facile. ∎

Nettement moins évident est le résultat suivant.

<u>Théorème 2</u> (injectivité des coefficients de Fourier)

Si f et $g \in \mathcal{L}^1_{pa}(\mathbb{T})$ ont mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$ (dans $\mathcal{L}^1$)

<u>Dem</u>

Dans un premier temps on a besoin de montrer la densité des polynômes trigonométriques. Pour cela on utilise une version généralisée du Théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème (Stone-Weierstrass général)

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C^0(K;\mathbb{C})$.
Si $\mathcal{A}$ vérifie :

i) $\mathcal{A}$ sépare les points (i.e. $\forall x \neq y \in K, \exists f \in \mathcal{A} / f(x) \neq f(y)$)

ii) $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison

iii) $\mathcal{A}$ contient les constantes,

alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C^0(K;\mathbb{C})$, pour la norme uniforme.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des polynômes trigonométriques vérifie toutes les conditions ci-dessus, il est donc dense dans $C^0([0,2\pi];\mathbb{C})$.

Si $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\int_0^{2\pi} f(x)P(x)\,dx = 0$ pour tout polynôme trigonométrique. Par Stone-Weierstrass et par convergence dominée on a $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = 0$ pour tout $g \in C^0([0,2\pi])$.

Pour passer à des fonctions plus générales que $C^0([0,2\pi])$ on a besoin du Théorème de Lusin.

Théorème (Lusin)

Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ telle que $\lambda(\{x / f(x) \neq 0\}) < \infty$. Alors il existe une suite $(g_n) \in C_c(\mathbb{R}^k)$ telle que :

- $\lambda(\{x / f(x) \neq g_n(x)\}) < 1/2^n$
- $\|g_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
- $g_n \to f$ p.s.

Par le Théorème de Lusin et par convergence dominée, on a pour tout A mesurable $\subset [0,2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathbb{1}_A(x)\,dx = 0.$$

Donc $f = 0$ p.p. ∎

Théorème 3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

$$\boxed{\text{Si } f \in L^1_{per}(\mathbb{T}), \text{ alors } \hat{f}(n) \to 0.}$$

Dem

On sait qu'il existe $g \in C^0([0,2\pi])$ tel que $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon/2$.
D'autre part il existe un polynôme trigo P tel que $\|g-P\|_\infty \leq \varepsilon/4\pi$. Donc, on a $\|g-P\|_1 \leq 2\pi\, \varepsilon/4\pi = \varepsilon/2$. Donc finalement on a $\|f-P\|_1 \leq \varepsilon$.
Pour n assez grand on a $\hat{P}(n) = 0$, donc
$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)-P(x))\, e^{-inx}\, dx.$$
Ce qui donne $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f-P\|_1 \leq \varepsilon/2\pi$. On a montré que $\hat{f}(n) \to 0$. ∎

3. Produit de convolution

D'abord quelques rappels.

Proposition 4.

a) Si f et $g \in L^1_{per}(\mathbb{T})$ alors la fonction $f*g$, définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\boxed{f*g(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(x-t)\, dt}$$
est bien définie et appartient à $L^1_{per}(\mathbb{T})$. On a d'ailleurs $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
Le produit de convolution $*$ est commutatif et associatif.

b) Si $1 \leq p \leq \infty$, si $f \in L^1_{per}(\mathbb{T})$, $g \in L^p_{per}(\mathbb{T})$, alors $f*g \in L^p_{per}(\mathbb{T})$. On a d'ailleurs
$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

c) Si $f \in L^1_{per}(\mathbb{T})$ et $g \in C^k_{per}(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, alors $f*g \in C^k_{per}(\mathbb{T})$ et $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$, pour $k \geq 1$.

d) Si $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p_{per}(\mathbb{T})$, $g \in L^q_{per}(\mathbb{T})$, alors $f*g \in C^0_{per}(\mathbb{T})$.
On a de plus $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Dem

a) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dx\,dt = \int_0^{2\pi}|f(t)|\int_0^{2\pi}|g(x-t)|\,dx\,dt = \int_0^{2\pi}|f(t)|\int_{-t}^{2\pi-t}|g(x)|\,dx\,dt$$
$$= \left(\int_0^{2\pi}|g(x)|\,dx\right)\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt < \infty$$. Donc par Fubini $f*g\,(x)$ est bien défini et appartient à L^1.

$$g*f\,(x) = \int_0^{2\pi} g(t)\,f(x-t)\,dt \underset{y=x-t}{=} -\int_x^{x-2\pi} g(x-y)\,f(y)\,dy = \int_0^{2\pi} g(x-y)\,f(y)\,dy = f*g\,(x).$$

$$(f*g)*h\,(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,g(t-u)\,h(x-t)\,du\,dt$$
$$f*(g*h)\,(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,g(t)\,h(x-u-t)\,dt\,du$$
$$\underset{t'=u+t}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,g(t'-u)\,h(x-t')\,dt'\,du.$$

b) $$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}|f(t)|\,|g(t-x)|\,dt\right]^p dx = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}|f(t)|^{1/p}\,|g(x-t)|\,|f(t)|^{1/q}\,dt\right]^p dx$$
$$\leq \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|\,|g(x-t)|^p\,dt\right)\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt\right)^{p/q} dx$$
$$\leq \|f\|_1^{p/q}\,\|f*g^p\|_1 \leq \|f\|_1^{p/q}\,\|f\|_1\,\|g^p\|_1 = \|f\|_1^p\,\|g\|_p^p.$$
Cela montre $f*g \in L^p$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p$.

c) $f*g\,(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\,g(x-t)\,dt$. La fonction $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est C^k pour tout t et $\forall j \leq k$ $|f(t)\,g^{(j)}(x-t)| \leq \|g^{(j)}\|_\infty\,|f(t)|$ qui est intégrable. Donc par le théorème de dérivation C^k sous l'intégrale, on a montré que $f*g$ est C^k. On sait aussi que
$$(f*g)^{(k)}(x) = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\,f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,g^{(k)}(x-t)\,dt = f*g^{(k)}\,(x).$$

d) $\left|\int_0^{2\pi} f(t)\,g(x-t)\,dt\right| \leq \|f\|_p\,\|g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p\,\|g\|_q$. On a montré $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\,\|g\|_q$.

Soit (f_n) une suite de fonction dans $C^0_{per}(\mathbb{T})$ telles que $\|f_n - f\|_p \to 0$ (si $p \neq +\infty$). Alors $f_n*g \in C^0_{per}(\mathbb{T})$ et $\|f*g - f_n*g\|_\infty \leq \|f-f_n\|_p\,\|g\|_q$, montrant ainsi que f_n*g converge unif. vers $f*g$ qui est donc continue.

Si $p=+\infty$, on prend $(g_n) \subset C^0_{per}(\mathbb{T})$ telle que $\|g_n - g\|_1 \to 0$. Puis le même raisonnement. ∎

Maintenant si on revient aux coefficients de Fourier de f, on remarque que

$$\boxed{\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}(f * e_n)\, e_{-n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\hat{f}(n)e_n = \frac{1}{2\pi}(f*e_n)}$$

D'où l'on tire facilement

Proposition 5

Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{per}(\mathbb{T})$, alors

$$\widehat{f*g}(n) = 2\pi\, \hat{f}(n)\, \hat{g}(n) \quad , \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dem

C'est l'associativité du produit de convolution:

$$\widehat{f*g}(n)\, e_n = \frac{1}{2\pi}\, e_n * (f*g) = \frac{1}{2\pi}(e_n * f)*g = \hat{f}(n)\, e_n * g = 2\pi\, \hat{f}(n)\, \hat{g}(n)\, e_n. \qquad \blacksquare$$

Maintenant des rappels sur les approximations de l'unité:

On appelle approximation de l'unité toute suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{T})$ telle que:

1) $\sup_n \|k_n\|_1 < \infty$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\,dt = 1$

3) $\forall\, 0 < \delta < \pi, \quad \lim_n \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |k_n(t)|\,dt = 0.$

Théorème 6

Soit $1 \leq p < \infty$. Si (k_n) est une approximation de l'unité et si $f \in \mathcal{L}^p_{per}(\mathbb{T})$, alors $\frac{1}{2\pi} k_n * f$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p_{per}(\mathbb{T})$.

Dem

Lemme 7

Si $1 \leq p < \infty$ et si $f \in \mathcal{L}^p_{per}(\mathbb{T})$ alors l'application $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}^p_{per}(\mathbb{T}) \\ x \longmapsto \tau_x f \end{array}$ est continue.

Dem Lemme

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $f_c \in \mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{T})$ telle que $\|f - f_c\|_p \leq \varepsilon$.

Comme f_c est continue sur $\mathbb{T}$, elle est uniformément continue. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R},\ |f_c(a+x) - f_c(a+x_0)| < \varepsilon$, i.e. $\|\tau_x f_c - \tau_{x_0} f_c\|_\infty < \varepsilon$.

Mais $\|\tau_x f_c - \tau_{x_0} f_c\|_p \leq 2\pi \|\tau_x f_c - \tau_{x_0} f_c\|_\infty$. Donc, finalement on a :

$$\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p \leq \|\tau_a f - \tau_a f_c\|_p + \|\tau_a f_c - \tau_{a_0} f_c\|_p + \|\tau_{a_0} f_c - \tau_{a_0} f\|_p$$
$$\leq 2\|f - f_c\|_p + 2\pi \|\tau_a f_c - \tau_{a_0} f_c\|_\infty \leq (2+2\pi)\varepsilon.$$

□ Lemme.

On revient à la dém. du théorème. On définit $g(x) = \tau_x f$ comme ci-dessus. On a

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\, g(t)\, dt - g(0) \right\|_p = \left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\,(g(t)-g(0))\, dt \right\|_p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, \|g(t)-g(0)\|_p\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)|\, \|g(t)-g(0)\|_p\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |k_n(t)|\, \|g(t)-g(0)\|_p\, dt$$

$$\leq \max_{|t|\leq\delta} \|g(t)-g(0)\|_p \|k_n\|_1 + \max_{\mathbb{T}} \|g(t)-g(0)\|_p \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |k_n(t)|\, dt \qquad (*)$$

Soit $M = \sup_n \|k_n\|_1$, soit $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta \Rightarrow \|g(t)-g(0)\|_p \leq \varepsilon/2\pi$.

Soit N tel que $n \geq N \Rightarrow \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |k_n(t)|\, dt \leq \dfrac{\pi\varepsilon}{\max_{\mathbb{T}} \|g(t)-g(0)\|_p}$.

Alors, pour $n \geq N$ on a $(*) \leq \varepsilon$.

On a ainsi montré que $\frac{1}{2\pi} k_n * f \xrightarrow{L^p} f$. ■

Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et $\in L^1([0,2\pi])$, on peut calculer $\hat{f}(n)$ comme ci-dessus et considérer la <u>série de Fourier de f</u>

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx}}$$

Il se pose alors naturellement deux questions :

- Cette série converge t'elle ? Simplement, uniformément, normalement ?
- si elle converge, vers quelle fonction ? Surtout : converge t'elle vers f ?

Dans la théorie des séries de Fourier on répond à ces questions, ce sont les théorèmes que nous allons établir. Mais aussi on regarde les calculs explicites de coefficients de Fourier qui permettent de calculer explicitement des sommes de séries.

4. Le cas L^2

Le cas où f appartient à $L^2_{pa}(\mathbb{T})$ est très agréable car on rentre dans de la théorie hilbertienne

On note e_n la fonction $x \longmapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Thm 8

> La famille des fonctions $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthogonale de $L^2_{pa}(\mathbb{T})$.
> De plus, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartenant à $L^2_{pa}(\mathbb{T})$, on a
>
> i) $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \langle e_n | f \rangle$
>
> ii) $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \langle e_n | f \rangle e_n$, où la convergence est normale dans $L^2_{pa}(\mathbb{T})$
>
> iii) $\boxed{\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2}$ (Egalité de Parseval)

Dem

On a déjà vu que $\langle e_n | e_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{n,m} 2\pi$. Donc la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthogonale dans $L^2_{pa}(\mathbb{T})$. On a $\|e_n\|^2 = 2\pi$.

Pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer le caractère total. Mais c'est un raisonnement qu'on a déjà vu : il existe $g \in C^0([0,2\pi])$ tq $\|f-g\|_2 \leq \varepsilon$. Ensuite il existe P polynôme trigo tq $\|g-P\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \|g-P\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\,\|g-P\|_\infty \leq \sqrt{2\pi}\,\varepsilon$, donc la densité des pol. trigo.

Le reste est du calcul usuel en b.o.n. Hilbertienne. Posons $g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors (g_n) est une b.o.n. de $L^2([0,2\pi])$. Donc on sait que

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle g_n | f \rangle g_n \quad \text{où la série converge en norme } L^2$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \langle e_n | f \rangle e_n \qquad \text{(ce qui donne ii))}$$

et que $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle g_n | f \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} |\langle e_n | f \rangle|^2$.

Mais l'identité $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \langle e_n | f \rangle$ est immédiate (d'où i)), ce qui donne maintenant iii). ∎

Corollaire 9

> Si $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite $\in \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$, alors la série de fonctions
>
> $$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad (1)$$
>
> converge normalement dans $L^2_{pa}(\mathbb{T})$. Sa somme g est une fonction dont la série de Fourier est donnée par (1). On a en particulier $\|g\|_{L^2_{pa}(\mathbb{T})} = \|(c_n)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. Ainsi la transformée de Fourier établit un isomorphisme unitaire entre $L^2_{pa}(\mathbb{T})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Corollaire 10

Soit $f \in \mathcal{L}^2_{per}(\mathbb{T})$, alors la N-ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

constitue la meilleure approximation de f en moyenne quadratique, parmi tous les polynômes trigonométriques de "degré" $\leq N$.

En particulier, l'erreur commise en approchant f par P_N est

$$\|f - P_N\|_2 = 2\pi \sum_{|n|>N} |\hat{f}(n)|^2$$

Corollaire 11

Si $f \in \mathcal{L}^2_{per}(\mathbb{T})$ et qu'on écrit sa série de Fourier sous la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

alors

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2}$$

Dem

$c_0 = \frac{a_0}{2}$ donc $|c_0|^2 = \frac{|a_0|^2}{4}$

$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$ $\Rightarrow$ $|c_n|^2 = \bar{c}_n c_n = \frac{1}{4}\left(|a_n|^2 - i \bar{b}_n a_n + i b_n a_n + |b_n|^2\right)$

$|c_{-n}|^2 = \bar{c}_{-n} c_{-n} = \frac{1}{4}\left(|a_n|^2 + i \bar{b}_n a_n - i b_n a_n + |b_n|^2\right)$

$|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$ ∎

5. Le théorème de Dirichlet

Proposition 12

Soit $f \in L^1_{per}(\mathbb{T})$, alors $\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} f * D_N(x)$ où

$$D_N(x) = \frac{\sin\left((2N+1)x/2\right)}{\sin x/2}$$ (Noyau de Dirichlet.

Dem

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} e^{inx} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t) \, dt$$

où $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = e^{-iNt} \sum_{n=-N}^{N} e^{it(n+N)} = e^{-iNt} \sum_{n=0}^{2N} e^{int} = e^{-iNt} \frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}}$

$$= \frac{e^{-iNt} - e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}} \frac{e^{-i(N+1/2)t} - e^{i(N+1/2)t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2}.$$ ∎

Théorème 13 (Dirichlet)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et C^1 par morceaux, alors en tout point $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f converge vers $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$.

Dem

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x-t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(t) \left[f(x-t) + f(x+t)\right] dt$$

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(t) \left[f(x-t) + f(x+t)\right] dt - \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$$

On a $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e_0(t) \, dt = 2\pi$. Donc $2\int_0^{\pi} D_N(t) = 2\pi$, d'où

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(t) \left[f(x-t) - f(x_-) + f(x+t) - f(x_+) \right] dt$$

On va montrer que $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(t) \left[f(x-t) - f(x_-)\right] dt = 0$. Il en sera de même pour l'autre terme.

Ce terme est égal à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((N+\tfrac{1}{2})t)\cdot\frac{t}{\sin t/2}\cdot\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}\,dt$$

Mais : • $\frac{t}{\sin t/2}$ est C^0 sur $\mathbb{T}$

• f est dérivable à droite en x, donc $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}$ existe.

en particulier $t\longmapsto \frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}\in \mathcal{L}^1([0,\pi])$

On a donc une expression du genre $\int_0^{\pi}\sin((N+\frac{1}{2})t)\,g(t)\,dt$, avec $g\in\mathcal{L}^1$. Donc par Riemann-Lebesgue ça tend vers 0. ∎

Théorème 14 (Principe de localisation)

> Si f et $g\in\mathcal{L}^1_{per}(\mathbb{T})$ et coïncident sur $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, alors les séries de Fourier de f et g au point x_0 ont le même comportement (convergence ou divergence) et la même limite, le cas échéant.

Dem

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x_0)-S_N(g)(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\,D_N*(f-g)\,(x_0)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\left[g(x_0-t)-f(x_0-t)\right]dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\left[g(x_0-t)+g(x_0+t)-f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} D_N(t)\left[g(x_0-t)+g(x_0+t)-f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin t/2}\,h_{f,g}(t)\,dt
\end{aligned}$$

où $h_{f,g}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Comme $\left|\frac{h_{f,g}(t)}{\sin t/2}\right|\le\left|\frac{h_{f,g}(t)}{\sin \delta/2}\right|$ pour tout $t\in[\delta,\pi]$, alors $\frac{h_{f,g}(t)}{\sin t/2}\in\mathcal{L}^1$!

On conclut encore par Riemann-Lebesgue. ∎

Ce théorème dit que la série de Fourier de f en x_0 ne dépend que du comportement de f au voisinage de x_0. C'est très surprenant, vu que les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx$ dépendent de f sur l'intervalle $\mathbb{T}$ tout entier.

6 - Convergence uniforme, normale

Théorème 15

i) Si $f \in C^0_{per}(\mathbb{T})$ et $\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f en tout point.

ii) Si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est telle que $\sum_n |c_n| < \infty$, alors la fonction $g(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ est continue et $c_n = \hat{g}(n)$.

Dem

Posons $g(x) = \sum_n \hat{f}(n) e^{inx}$, elle est continue car limite normale, donc uniforme, de fonctions continues.

Si on calcule $\hat{g}(n)$ on obtient

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_m \hat{f}(m) e^{i(m-n)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_m \int_0^{2\pi} \hat{f}(m) e^{i(m-n)x}\,dx \quad \text{(car la cv. de la } \Sigma \text{ est unif)}$$

$$= \sum_m \hat{f}(m)\,\delta_{n,m} = \hat{f}(n).$$

On a ainsi montré ii). On a aussi i) par l'unicité des coeff. de Fourier. ∎

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est <u>rapidement décroissante</u> si $u_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ en $\pm\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 16

i) Si f est continue et C^1 par morceaux alors $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$.

ii) Si f est continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement $\left(\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty\right)$.

iii) Si $f \in C^k_{per}(\mathbb{T})$ alors $\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

iv) Si $c_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, avec $k \geq 2$, alors $g(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ est C^{k-2}.

v) L'application $f \mapsto (\hat{f}(n))$ établit un isomorphisme entre $C^\infty_{per}(\mathbb{T})$ et l'espace des suites rapidement décroissantes.

Dem

i) $$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\cancel{-f(t)\frac{e^{-int}}{in}}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-int}\,dt$$
$$= \frac{1}{in}\widehat{f'}(n). \qquad (n \neq 0)$$

Pour $n=0$: $\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\right]_0^{2\pi} = 0.$

On a donc bien montré $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

ii) f' est continue par morceaux donc $L^2_{per}(\mathbb{T})$. En particulier $\sum_n |\widehat{f'}(n)|^2 < \infty$.

On a donc $\sum_n |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_n |\widehat{f'}(n)|^2\right)^{1/2} < \infty$.

iii) C'est une itération de l'I.P.P. du i).

iv) Si $c_n = o(1/n^2)$ alors $g(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ est continue par le Thm 15.

Si $c_n = o(1/n^3)$ alors la série $\sum_n in c_n e^{inx}$ est unif. conv. Donc par le thm de dérivation des séries de fonctions : g est C^1. Etc...

v) facile avec ce qu'on a fait ci-dessus.

∎

Corollaire 17

Si f est continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

7. Le théorème de Fejer

Pour aller chercher des convergences autres que celles obtenues jusqu'à maintenant, avec des conditions plus faibles, un obstacle pour le moment c'est que le noyau de Dirichlet n'est pas une approx. de l'unité; il vérifie ii) et iii) mais pas i) (pas évident, mais admis).

Si on remplace la cv simple par la conv. en moyenne de Cesaro, on a un autre noyau qui apparait.

On pose $F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k$ (Noyau de Fejer)

$$F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=-k}^{k} e_j = \frac{1}{N+1} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=|j|}^{N} e_j = \sum_{j=-N}^{N} \frac{N+1-|j|}{N+1} e_j = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j .$$

$$\boxed{F_N = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j}$$

$$(N+1) F_N(x) = \sum_{k=0}^{N} D_k(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{N} \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} e^{ix/2} \frac{e^{i(N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \frac{e^{ix/2} e^{i\frac{(N+1)}{2}x}}{e^{ix/2}} \frac{e^{i\frac{(N+1)}{2}x} - e^{-i\frac{(N+1)}{2}x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} e^{i\frac{(N+1)}{2}x} \frac{\sin\frac{(N+1)}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 .$$

$$\boxed{F_N(x) = \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2}$$

Proposition 18

> La famille (F_N) est une approximation de l'unité.

Dem

$\forall n,\ F_n * e_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{\ell=0}^{N} D_\ell * e_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{\ell=0}^{N} e_0 = e_0.$

Donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x)\,dx = 1.$

Comme $F_N(x) \geq 0\ \forall x \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \|F_N\|_1 = 1.$

Enfin, si $|x| > \delta \Rightarrow F_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2 \delta/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ∎

Pour $f \in L^1_{per}(\mathbb{T})$, on pose $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$

et $\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\left(S_0(f)(x) + \cdots + S_N(f)(x)\right)$. De sorte que

$$\boxed{\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} F_N * f\,(x)}$$

Thm de Fejer (19)

1) Si $f \in C^0_{per}(\mathbb{T})$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N]{} 0$

2) Si $f \in L^p_{per}(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

Dem

1) $f(x) - \sigma_N(f)(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)]\, K_N(t)\,dt$

$|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi}$ même chose

$\boxed{\omega(\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|}$

$\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_N(t)\,dt + 2\frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} K_N(t)\,dt$

$\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin^2 \delta/2} = \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin^2 \delta/2}$

$\overline{\lim_N} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \leq \omega(\delta)$

$\lim_{\delta \to 0} \Rightarrow \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \to 0$. ✓

2) Déjà vu sur les approx. de l'unité.

∎

Corollaire 20

> Si $f \in C^0_{per}(\mathbb{T})$ et si $S_N(f)(x_0) \to \ell$ alors $\ell = f(x_0)$.

Dem

Si $S_N(f)(x_0) \to \ell$, on sait par le Thm de Cesàro que $\sigma_N(f)(x_0) \to \ell$ aussi.
Mais par le thm précédent $\sigma_N(f)(x_0) \to f(x_0)$.

$\square$

Corollaire 21

> Si $f \in C^0_{per}(\mathbb{T})$ et $c_n \geq 0 \ \forall n$, alors $\sum_n c_n < \infty$ (i.e. C.V.N).

Dem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^+ c_n \underset{\text{Fatou}}{\leq} \varliminf_{N\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{|n|}{N}\right)^+ c_n = \varliminf_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \left(1-\frac{|n|}{N}\right) c_n$$

$$= \varliminf_{N\to\infty} \sigma_N(f)(0) = f(0).$$

$\blacksquare$

Contre-exemple de du Bois-Remond

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists\, f \in C^0_{per}(\mathbb{T}) \text{ tq } \sup_N |S_N(f)(0)| = +\infty \\ \text{La suite } S_N(f) \text{ diverge en } 0. \end{array}}$$

Soit (n_ℓ) une suite d'entiers, (α_ℓ) une suite de réels >0 telles que

$n_{\ell+1} > 3 n_\ell$, $\sum_\ell \alpha_\ell < \infty$, $\alpha_\ell \ln n_\ell \to \infty$.

On pose

$$P_\ell(x) = e^{2in_\ell x} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{\sin jx}{j} = e^{2in_\ell x}\, G_{n_\ell}(x)$$

Notez que $Sp[P_\ell] \subset [n_\ell, 3n_\ell]$, donc les spectres de P_ℓ ne se croisent pas.

On pose $f = \sum_\ell \alpha_\ell P_\ell$. La série converge normalement en $\|\cdot\|_\infty$ car $\|P_\ell\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} + 1$. Du coup $f \in C$.

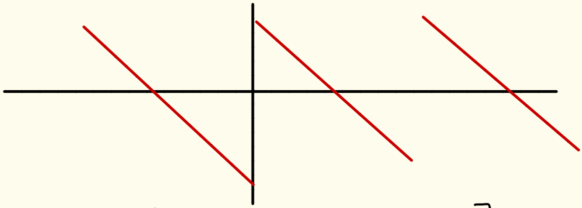
On a $C_n(f) = \sum_\ell \alpha_\ell C_n(P_\ell) = \begin{cases} C_n(P_\ell) & \text{si } \exists \ell \text{ tq } n_\ell \leq n \leq 3n_\ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi $S_{2n_\ell}(f)(x) = \alpha_1 P_1(x) + \dots + \alpha_{\ell-1} P_{\ell-1}(x) - \frac{\alpha_\ell}{2i} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{e^{i(2n_\ell - j)x}}{j}$

$S_{2n_\ell}(f)(0) = -\frac{\alpha_\ell}{2i} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{1}{j} \implies |S_{2n_\ell}(f)(0)| \geq \frac{\alpha_\ell}{4} \ln n_\ell$ pour ℓ assez grand. $\blacksquare$

8. Phénomène de Gibbs

$f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $[0, 2\pi]$ + 2π périodique



$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\left[\frac{-\pi}{2n}\cos nx\right]_0^{2\pi}} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x \sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{-2\pi}{n} + 0\right) = \frac{1}{n}$$

$0 < x < 2\pi \qquad \dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}, \quad S_N' = \sum_{n=1}^{N}\cos nx = \frac{1}{2}\left(D_N(x) - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin x/2} - 1\right)$$

$$\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)$$

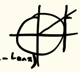
$$S_N = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin x/2}\,dx - x/2$$

D.L. en 0 : $S_N = \underbrace{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2N+1)x/2}{x}dt}_{= \int_0^{(N+1/2)x}\frac{\sin s}{s}ds} + O(x^2) - x/2$

$f = \dfrac{\sin x}{x} \qquad f' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$x \cos x = \sin x$

$x = \tan x$



$x \cos - \sin = \cos(x - \tan x)$

$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin s}{s}ds$ prend son max en π et vaut $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx = 1,85\ldots$

En $x = \dfrac{2\pi}{2N+1}$, S_N dépasse de $0,28$ la valeur de $f(0+) = \pi/2 = 1,57\ldots$ au vois de 0.

Idem en $\dfrac{-2\pi}{2n+1}$

Si g fait un saut d'amplitude A en 0 et admet dérivée continue au vois de 0.

$g - \dfrac{A}{\pi}f$ est continue, C^1 donc sa série de Fourier cv unif vers $g - \dfrac{A}{\pi}f$

Ainsi les Σ partielles de série de Fourier de g dépassent $g(0+)$ de $\dfrac{0,28}{\pi}A$.

Une série trigo qui n'est pas une série de Fourier

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ une série trigo, cv partout.

Mq si $\exists f \in C^1$ tq $c_0(f)=0$, $c_n(f) = \frac{a_n}{2i}$, $c_{-n}(f) = \frac{-a_n}{2i}$, alors $F(x) := \int_0^x f(u)\,du \in C^0_{per}(\pi)$

et $C_n(F) = \frac{-a_{|n|}}{2|n|}$.

Mq $\sum_n \frac{a_n}{n} < \infty$

Mq $\sum_n \frac{\sin nt}{\log n}$ est un contre-exemple.

F est continue
$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(u)\,du = \int_0^{2\pi} f(u)\,du = 2\pi\, c_0(f) = 0$

Ainsi $F \in C^0_{per}(\pi)$.

$$C_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^x f(u)\, e^{-inx}\,du\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\int_u^{2\pi} e^{-inx}\,dx\;du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\frac{1-e^{-inu}}{-in}\,du = \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,e^{-inu} - \frac{1}{in}\cancel{\int_0^{2\pi} f(u)\,du}$$

$$= \tfrac{1}{in}\, c_n(f)$$

$n>0$: $C_n(F) = \frac{a_n}{-2n}$
$n<0$: $C_n(F) = \frac{-a_n}{-2n} = \frac{a_n}{2n}$

$\Big\}\; C_n(F) = -\frac{a_{|n|}}{2|n|}$.

Si $G(x) = c_0(F) - F(x)$, alors $c_0(G) = 0$, $c_n(G) = \frac{a_{|n|}}{2|n|} \geq 0$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{a_{|n|}}{2|n|} < \infty$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n}$$

Abel: $$\sum_1^N \sin nt = \operatorname{Im}\sum_1^N e^{int} = \operatorname{Im}\frac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}} = \operatorname{Im}\frac{e^{iN/2\,t}}{e^{it/2}}\;\frac{\sin Nt/2}{\sin t/2} = \frac{\sin N t/2}{\sin t/2}\,\sin\frac{N-1}{2}t$$

$\left|\sum_1^N \sin nt\right| \leq \frac{1}{\sin t/2}$. Abel $\Rightarrow \sum_2^N \frac{\sin nt}{\log n}$ cv

Mais $\sum_2^N \frac{1}{n\log n}$ ne cv pas. (Bertrand).

Amélioration du Thm de Dirichlet

Si $f \in L^1_{per}(\pi)$, si $\lim_{x_0^-} f(x) = f(x_0-)$ et $\lim_{x_0^+} f(x) = f(x_0+)$ existent,

si $\exists \delta > 0$ tq $\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+)|}{t} dt < \infty$ et $\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-)|}{t} dt < \infty$

alors $\lim_N S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$

On avait ce terme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin((N+\tfrac{1}{2})t) \cdot \frac{t}{\sin t/2} \cdot \frac{f(x_0-t) - f(x_0-)}{t} \, dt$$

avec $\frac{t}{\sin t/2} \in C^0(\pi)$

et maintenant $\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-)|}{t} < \infty$, mais $\int_\delta^{2\pi} \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-)|}{t} dt < \int_\delta^{2\pi} \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-)|}{\delta} dt < \infty$

Donc $\frac{t}{\sin t/2} \frac{f(x_0-t) - f(x_0-)}{t}$ est L^1 et l'argument est le même. $\blacksquare$

<u>Corollaire</u>

Si $f \in C^{0,\alpha}_{per}(\pi)$, $0 < \alpha < 1$, alors Dirichlet s'applique

$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$, i.e. $\exists M \,/\, |f(x) - f(y)| \leq M |x-y|^\alpha$

Dem $\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-)|}{t} dt \leq \int_0^\delta M \frac{t^\alpha}{t} dt < \infty$. $\blacksquare$

<u>Proposition</u>

Si $f \in C^{0,\alpha}_{per}(\pi)$ alors $\sum_n |c_n|^p < \infty \quad \forall p > \frac{2}{2\alpha+1}$

<u>Dem</u>

$c_n(\tau_h f - f) = (e^{inh} - 1) c_n(f) = 2i \, e^{inh/2} \sin(nh/2) \, c_n(f)$

Parseval :

$$4 \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t+h) - f(t)|^2 dt \leq M^2 h^{2\alpha}$$

$$h = 2^{-N} : \quad M^2 \, 2^{-2N\alpha} \geq \sum_{-\infty}^{\infty} 4 \sin^2\left(n\frac{h}{2}\right) |c_n|^2 \geq \sum_{2^N \leq |n| < 2^{N+1}} 4 \sin^2(n \, 2^{-N-1}) |c_n|^2$$

$$\geq \sum_{2^N \leq |n| < 2^{N+1}} 4 \sin^2(1/2) |c_n|^2$$

$$\sum_{2^N \le |n| < 2^{N+1}} |c_n|^2 \le \Pi' \, 2^{-2N\alpha}$$

$$\sum_{2^N \le |n| < 2^{N+1}} |c_n|^p \le \Big(\sum |c_n|^2 \Big)^{1/r} \Big(\sum 1 \Big)^{1/r'}$$

$r = \frac{2}{p}$, $r' = \frac{2}{2-p}$

$$\le \Pi'^{1/r} \, 2^{-2N\frac{\alpha}{r}} \, 2^{\frac{N+1}{r'}} = \Pi'^{1/r} \, 2^{1/r'} \underbrace{2^{-N\left(2\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{r'}\right)}}_{2^{-\lambda N}}$$

$\lambda > 0$: $\quad 2\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{r'} = \alpha p - \frac{2-p}{2}$

$= p(\alpha + \frac{1}{2}) - 1$

$p > \frac{2}{2\alpha+1}$. ✓

<u>Corollaire</u>

$\boxed{\text{Si } f \in C^{0,\alpha}_{per}(\mathbb{T}) \ \alpha > 1/2 \Rightarrow CVN.}$

$\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow (c_n) \in \ell^p$, $p > \frac{2}{2\alpha+1}$ $\qquad \frac{2}{2\alpha+1} \geq 1$

$2 \geq 2\alpha+1$

$\alpha \le 1/2$