Coniques

Exercice 1 *On considère la conique* $(\mathcal{C})$*d'équation* $5x^2 - 6xy + 5y^2 + \sqrt{2}y - \sqrt{2}x = 4$*. Montrer que* $(\mathcal{C})$ *s'obtient à partir de la conique* $(\mathcal{C}')$ *d'équation* $2x^2 + 7y^2 = 9/4$ *par translation et rotation.*

Exercice 2 *Considérons la conique* $(\mathcal{C})$ *d'équation* $x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

Montrer qu'on peut trouver $l_1(x, y)$ *et* $l_2(x, y)$ *de la forme* $l_1(x, y) = ax+by+c$ *et* $l_2(x, y) = \alpha y+\beta$ *(a, b, c,* α *et* β *sont à déterminer) tels que l'équation de* $(\mathcal{C})$ *s'écrive* $l_1(x, y)^2 + l_2(x, y)^2 = 1$ *(On commencera par mettre tous les termes contenant* x *dans un carré puis on effectue la même opération avec la variable* y*).*

Effectuer la même opération pour la conique d'équation $2x^2 + 8xy + 3y^2 - 4x - 14y - 9 = 0$.

Exercice 3 *Montrer que le support de la courbe parametrée de* $\mathbb{R}^2$*,* $\mathcal{C}$ *définie par*

$$\mathcal{C}\left\{\begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \cos(t) + \sin(t) \end{array}\right. \quad ; \ t \in \mathbb{R}.$$

est une ellipse.

Exercice 4 *Soit* α *appartenant à l'intervalle* $]0, \pi[$*, on considère l'équation de la variable complexe* $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 \sin^2 \alpha - 4z \sin \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. *Résoudre l'équation (E).*
2. *On note* M_1 *et* M_2 *les images des racines* z_1 *et* z_2 *de l'équation (E) dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *du plan complexe. Montrer que lorsque* α *varie, l'ensemble des points* M_1 *et* M_2 *parcoure une branche d'une hyperbole* $\mathcal{H}$ *dont on donnera une équation.*

Exercice 5 *On considère la famille de courbe* $\mathcal{C}_m$ *de courbe de* $\mathbb{R}^2$ *définie par l'équation*

$$2mx^2 - (m - 1)y^2 - 8mx + 12m - 2 = 0$$

où m *désigne un paramètre réèl.*

1. *Montrer que l'équation de* $\mathcal{C}_m$ *peut s'ecrire sous la forme* $\lambda(x - a)^2 + \mu(y - b)^2 = \nu$ *(avec* λ*,* μ*,* ν*,* a *et* b *des paramètres réels dépendant de* m *à déterminer.*
2. *discuter de la nature de* $\mathcal{C}_m$ *suivant la valeur du paramètre* m *(on traitera à part les cas* $m = 0$*, 1 et* $1/2$*).*

Lignes de niveau et fonctions partielles

Rappel : Soit f une fonction de deux variables définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. Pour $k \in \mathbb{R}$ on appelle *ligne de niveau* k de la fonction f l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D}_f \,;$ tel que $f(x, y) = k\}$.

Exercice 6 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *dont le graphe est donné par la figure* 1 *Donner l'équation des lignes de niveau* -1*,* 0 *et* 1*. En s'aidant du dessin représenter ces lignes de niveaux.*

Exercice 7

1. *Trouver les lignes de niveaux* 0*,* 1*,* -1*,* 2 *et* 3 *de la fonction* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *et les représenter graphiquement. Même question avec* $f(x, y) = 2y/x$.
2. *Pour la fonction* $f(x, y) = x - y - |x - y|$*, donner l'allure des lignes de niveau pour* $k \in \mathbb{R}$ *(traiter séparément les cas* $k < 0$*,* $k = 0$ *et* $k > 0$*.*

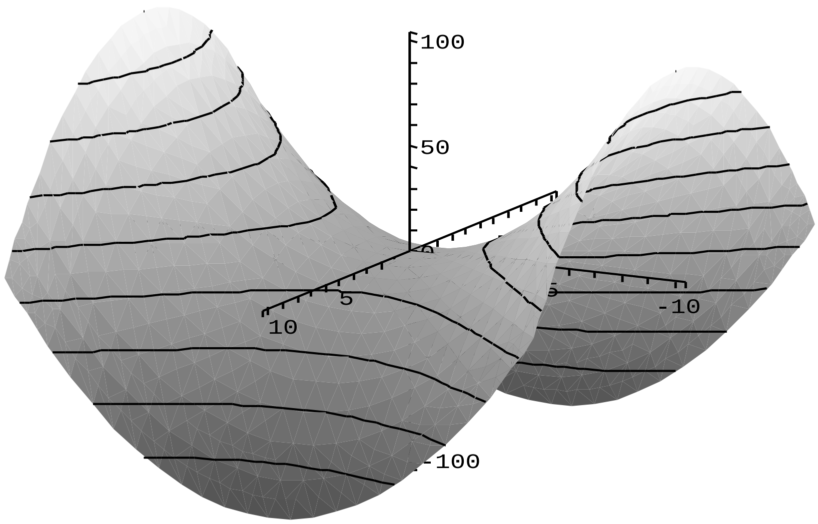

Fig. 1 – Graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ et quelques lignes de niveau

Exercice 8 *Soit f une fonction de $D \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A = (a,b)$ un point intérieur de D. Les fonctions $x \longmapsto f(x,b)$ et $y \longmapsto f(a,y)$ définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.*

1. *Déterminer les fonctions partielles de la fonction $f(x,y)$ représentée graphiquement dans l'exercice 6 au point $(0,0)$. Représenter la courbe correspondant aux fonctions partielles sur le dessin.*
2. *Trouver les fonctions partielles aux points $(0,0)$ et $(1,2)$ des fonctions suivantes*

$$g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad g_2(x,y) = xy \quad ; \quad g_3(x,y) = x^2y - 1$$

Exercice 9 *On considère la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et on considère la surface $\mathcal{S}$ définie par l'équation $z = f(x,y)$ (voir figure 2).*

1. *Représenter graphiquement la surface $\mathcal{S}$ et les lignes de niveau 0, 1, -1 de f.*
2. *Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A de coordonnées $(0,0,2)$ dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.*
3. *Vérifier que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et de norme 1. On se place alors dans le plan $(\mathcal{P})$ ramener au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Donner une équation de la courbe $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$, quelle est la nature de cette courbe ?*

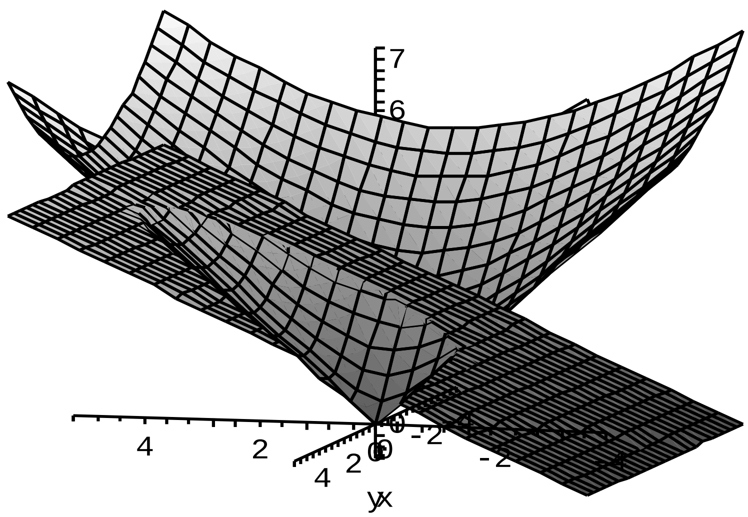

Fig. 2 – La surface $\mathcal{S}$ et le plan $\mathcal{P}$.

Limites de fonctions de deux variables

Exercice 10 *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$$

Etudier la limite pour (x,y) tendant vers $(0,0)$ en restant sur la droite d'équation $y = mx$ avec $m \in /R$ donné. En d'autres termes étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 11 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.*

1. *Etudier la limite de $f(x,y)$ pour (x,y) tendant vers $(0,0)$ en restant sur la droite d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.*
2. *Calculer la limite de $f(x,y)$ pour (x,y) tendant vers $(0,0)$ en restant sur la parabole d'équation $y = x^2$. Conclusion ?*

Exercice 12 *Pour une fonction de deux variables $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ on considère trois type de limites en un point $(a,b) \in D$:*

$$(A) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \quad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right); \quad (C) \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right).$$

Pour chacune des fonctions suivantes calculer si elles existes les limites (A), (B) et (C) au point $(0,0)$

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}; \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}; \quad f_3(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}.$$

Conclusion ?

Exercice 13 *Calculer si elles existent les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes*

$$a/\ f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} \quad b/\ f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4} \quad c/\ f(x,y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}$$