TRANSFORMÉE de FOURIER

1) Petite heuristique

Rien de vraiment rigoureux dans ce qui suit !

Si f est périodique de période T très grande. Ou bien f quelconque et on fait $g = f$ sur $[-T/2, T/2]$ + T-périodicité. Que se passe-t-il quand $T \to +\infty$?

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{i \frac{2\pi}{T} n x}$$

avec $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i \frac{2\pi n}{T} t}\, dt$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t}\, dt \; e^{i\omega_n x}\, \Delta\omega_n \;, \text{ où } \omega_n = \frac{2\pi}{T} n \,,\; \Delta\omega_n = \frac{2\pi}{T}$$

A la limite (somme de Riemann)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt \; e^{iyx}\, dy$$

Si on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt$, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{iyx}\, dy$.

2) Dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.}$$

C'est la transformée de Fourier de f.

Proposition 1

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle tend vers 0 à l'∞. On a $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Dem

- $\left.\begin{array}{l} x \longmapsto f(x) e^{-i\xi x} \text{ est continue.} \\ |f(x) e^{-i\xi x}| \leq |f(x)| \in \mathcal{L}^1 \end{array}\right\}$ donc par cv dom $\hat{f}$ est continue.
- $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$ donc $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

• Soit (f_n) une suite dans $C_K^\infty(\mathbb{R})$ tq $\|f-f_n\|_1 \to 0$. Alors $\|\hat f - \hat f_n\|_\infty = \|\widehat{f-f_n}\|_\infty \le \|f-f_n\|_1 \to 0$

Donc $\hat f_n \to f$ unif.

Mais $\hat f_n(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) e^{-i\xi x}\,dx = \cancel{\left[f_n(x)\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty}} + \frac{1}{i\xi}\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, e^{-ix\xi}\,dx$

$$= \frac{1}{i\xi}\widehat{f_n'}(\xi).$$

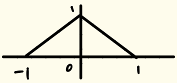
$$|\hat f_n(\xi)| \le \frac{1}{|\xi|}\|f_n'\|_\infty \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat f(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty}\ \underset{n\to\infty}{\text{lim unif}}\ \hat f_n(\xi) = \lim_n \lim_{|\xi|} \hat f_n(\xi) = 0.$$

■

<u>Quelques exemples qui nous serviront</u>

• $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}(t) \Rightarrow \hat f(\xi) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = \frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{i\xi} = 2\,\frac{\sin\xi}{\xi} = 2\,\text{sinc}(\xi)$

• 

$\Rightarrow \hat f(\xi) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,e^{-i\xi x}\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(x\xi)\,dx$

$$\frac12 \hat f(\xi) = \left[(1-x)\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin x\xi}{\xi}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x\xi}{\xi}\,dx = \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} \Rightarrow \hat f(\xi) = \text{sinc}^2(\xi/2)$$

• $f(x) = e^{-t|x|}$, $t>0$. $\hat f(\xi) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}e^{-i\xi x}\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{tx}e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{t+i\xi} + \frac{1}{t-i\xi} = \frac{2t}{t^2+\xi^2}$

• $f(x) = e^{-x^2}$ alors $\hat f(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$, on le fera en T.D.

• $f(x) = \text{sinc}^2(x)$ alors $\hat f(\xi) = \pi\left(1-\frac{|\xi|}{2}\right)^+$, idem TD

Dans la suite, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $\boxed{\check f(\xi) = \hat f(-\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\xi x}\,dx}$. On a $\check f \in C_0^0(\mathbb{R})$.

On pose aussi:
$S(x) = -x$
$H_\lambda(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$\tau_a f(x) = f(x-a)$
$e_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$

Proposition 2

Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$
- $\widehat{f \circ S} = \hat{f} \circ S = \check{f}$
- $\hat{\overline{f}} = \overline{\hat{f} \circ S} = \overline{\check{f}}$
- $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\widehat{f \circ H_a} = \frac{1}{|a|} \hat{f} \circ H_{1/a}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\widehat{\tau_a f} = e_{-a} \hat{f}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\widehat{e_a f} = \tau_a \hat{f}$
- $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

Toutes ces démonstrations sont faciles et laissées en exercice.

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1) Si f est C^1 et si $f' \in \mathcal{L}^1$ alors $f \xrightarrow[\pm\infty]{} 0$ et $\boxed{\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)}$

2) Si $Lf(x) = ixf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\boxed{\hat{f}' = -\widehat{Lf}}$.

Dem

1) $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$. Donc f admet une limite en $+\infty$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ cette limite ne peut être que 0.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx = \cancel{\left[f(x) \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty}} + \frac{1}{i\xi} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} \widehat{f'}(\xi)$$

2) $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$.

Thm dérivation sous l'intégrale : $\xi \mapsto f(x) e^{-i\xi x}$ est dérivable, de dérivée $-ixf(x)e^{-i\xi x}$.

$|-ixf(x)e^{-i\xi x}| = |Lf(x)| \in \mathcal{L}^1$. Donc par thm dérivation :

$$\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ixf(x) e^{-i\xi x} dx = -\int_{\mathbb{R}} Lf(x) e^{-i\xi x} dx = -\widehat{Lf}(\xi). \blacksquare$$

2) La classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

On dit qu'une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide si $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $\exists M_{k,n} > 0$ tq $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)| \leq M_{k,n}$.

C'est un s.e.v. de $C^\infty(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On pose $M_{k,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(n)}(x)|$, puis $\delta(f) = \sum_{k,n\in\mathbb{N}} 2^{-(k+n)} \min(1, M_{k,n}(f))$

et enfin $d(f,g) = \delta(f-g)$.

Proposition 4

1) d est une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2) Une suite $(f_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge pour d vers $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} M_{k,p}(f_n - f) = 0$ $\forall k, p \in \mathbb{N}$.
3) $\mathcal{S}$ est complet pour d.

Dem

1) On a la symétrie évidemment. On a $\delta(h+h') \leq \delta(h) + \delta(h')$ d'où l'inég. triang.
On a $\delta(h) = 0 \Rightarrow M_{0,0}(h) = 0 \Rightarrow \|h\|_\infty = 0 \Rightarrow h = 0$.

2) Si $f_n \xrightarrow{d} f$, alors $M_{k,p}(f_n - f) \leq 2^{k+p} d(f_n, f)$ donc $M_{k,p}(f_n - f) \xrightarrow[n]{} 0$.

Inversement, si chaque $M_{k,p}(f_n - f) \xrightarrow[n]{} 0$, alors $\forall r \geq 0$ posons

$$A_{r,n} = \sum_{k+p=r} 2^{-(k+p)} \min(1, M_{k,p}(f_n - f)) \leq \frac{1}{2^r}(r+1).$$

De plus, $\lim_n A_{r,n} = 0$ par hypothèse.

La série $\sum_r A_{r,n}$ conv. normalement par rapport à n, donc

$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sum_r A_{r,n} = \sum_r \lim_n A_{r,n} = 0$. Ainsi $f_n \xrightarrow{d} f$.

3) Si $(f_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est de Cauchy pour d, alors (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, donc $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ et du coup $f \in C_0^0(\mathbb{R})$.

Les suites $(f_n^{(p)})$ sont aussi de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$ (regarder $\Pi_{0,p}(f_n - f)$), donc elles CVU vers un $g^p \in C_0^0(\mathbb{R})$. Ainsi, par les thm usuels f est C^p et $f^{(p)} = g^p$.

Ainsi f est C^∞.

Reste à montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$.

$\forall \varepsilon > 0, \forall \ell, p, \exists N_{\varepsilon,\ell,p}$ tq $n, m \geq N_{\varepsilon,\ell,p} \Rightarrow d(f_n, f_m) \leq 2^{-(\ell+p)} \varepsilon$.

$\Rightarrow \min(1, \Pi_{\ell,p}(f_n - f_m)) \leq 2^{p+\ell} d(f_m, f_n) \leq \varepsilon < 1$

$\Rightarrow \Pi_{\ell,p}(f_n, f_m) = \min(1, \Pi_{\ell,p}(f_n - f_m)) \leq \varepsilon$

On a ainsi $|x|^\ell \, |f_n^{(p)}(x) - f_m^{(p)}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x$. En passant à la limite sur m :

$|x|^\ell \, |f_n^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x$, i.e. $\Pi_{\ell,p}(f - f_n) \leq \varepsilon$.

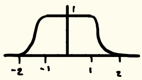
Du coup $\Pi_{\ell,p}(f) \leq \varepsilon + \Pi_{\ell,p}(f_{N_{\varepsilon,\ell,p}})$ est fini. On a montré $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a de plus $\Pi_{\ell,p}(f_n - f) \xrightarrow[n]{} 0$. Donc par 2) : $d(f_n, f) \to 0$. $\blacksquare$

Proposition 4

$$\boxed{C_K^\infty(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}).}$$

Dem

Il existe une fonction $\chi_1 \in C_K^\infty$ telle que 

(laissé en exercice)

Posons $f_n(x) = \chi_1(x/n) f(x)$, alors $f_n \in C_K^\infty$. Montrons que $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$.
$= \chi_n f(x)$

Notons D l'op. de dérivation. On a

$$D^p(f_n - f) = D^p(f(\chi_n - 1)) = \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p}{\ell} D^\ell(\chi_n - 1) D^{p-\ell}(f) = D^p(f)(\chi_n - 1) + \sum_{\ell=1}^{p} \binom{p}{\ell} D^\ell(\chi_n - 1) D^{p-\ell} f$$

Mais $D^\ell \chi_n(x) = \frac{1}{n^\ell} (D^\ell \chi_1)(\frac{x}{n})$, donc $\Pi_{0,\ell}(\chi_n) = \frac{1}{n^\ell} \Pi_{0,\ell}(\chi_1) \leq \frac{1}{n} \Pi_{0,\ell}(\chi_1)$.

Finalement :

$$\Pi_{k,p}(f_n - f) \leq \Pi_{k,0}\left(D^p(f)(\chi_n - 1)\right) + \sum_{\ell=1}^{p} \binom{p}{\ell} \Pi_{k,p-\ell}(f)\,\Pi_{0,\ell}(\chi_n)$$

$$\leq \Pi_{k,0}\left(D^p(f)(\chi_n - 1)\right) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{p} \binom{p}{\ell} \Pi_{k,p-\ell}(f)\,\Pi_{0,\ell}(\chi_1)$$

$$\leq \sup_{|x|\geq n} |x|^k |D^p f(x)| + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{p} \binom{p}{\ell} \Pi_{k,p-\ell}(f)\,\Pi_{0,\ell}(\chi_1)$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\Pi_{k+1,p}(f) + \sum_{\ell=1}^{p} \binom{p}{\ell} \Pi_{k,p-\ell}(f)\,\Pi_{0,\ell}(\chi_1)\right)$$

Donc $\Pi_{k,p}(f_n - f) \longrightarrow 0$. ∎

Corollaire 5

1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C_0^0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p\geq 1} L^p(\mathbb{R})$.
2) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$.
3) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $(C_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
4) L'injection $\mathcal{S} \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, est continue.

Dem

1) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $|f(x)| \leq \dfrac{\Pi_{0,0}(f) + \Pi_{2,0}(f)}{1+x^2} \in C_0^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$.

2) et 3) viennent du coup avec $C_K^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et la densité de C_K^∞.

4) $$\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leq \left(\Pi_{0,0}(f) + \Pi_{2,0}(f)\right)\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^p}\,dx\right]^{1/p} = C_p\left(\Pi_{0,0}(f) + \Pi_{2,0}(f)\right)$$

$$\|f\|_\infty \leq \left\|\frac{1}{1+x^2}\right\|_\infty \left(\Pi_{0,0}(f) + \Pi_{2,0}(f)\right)$$

∎

Théorème 6

Une a.l. $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue ssi $\forall (k,p) \in \mathbb{N}^2$, $\exists\, C_{k,p} \geq 0$ et $N_{k,p} \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\quad \Pi_{k,p}(Tf) \leq C_{k,p} \sum_{r+s \leq N_{k,p}} \Pi_{r,s}(f).$$

Dem

$\Leftarrow$: Si $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$, on a $\Pi_{k,p}(T(f_n - f)) \le C_{k,p} \sum_{n+s \le N_{k,p}} \Pi_{n,s}(f_n - f) \xrightarrow[n]{} 0$, donc $Tf_n \xrightarrow{\mathcal{S}} Tf$. ✓

$\Rightarrow$ Si T est continue : $\exists\, \alpha_{k,p} > 0 \,/\, d(f,0) \le \alpha_{k,p} \Rightarrow d(Tf, 0) \le 2^{-(k+p+1)}$.

- $d(Tf,0) \le 2^{-(k+p+1)}$, ça veut dire $\Pi_{k,p}(Tf) \le 1/2$
- $\exists\, N_{k,p}$ tq $\sum_{n+s > N_{k,p}} 2^{-(n+s)} \le \frac{\alpha_{k,p}}{2}$, donc si $\sum_{n+s \le N_{k,p}} \Pi_{n,s}(f) \le \frac{\alpha_{k,p}}{2}$, alors $d(f,0) \le \alpha_{k,p}$
  (car $\sum_{n+s > N_{k,p}} \Pi_{n,s}(f) \le \frac{\alpha_{k,p}}{2}$)

On a montré que : $\sum_{n+s \le N_{k,p}} \Pi_{n,s}(f) \le \frac{\alpha_{k,p}}{2} \Rightarrow \Pi_{k,p}(Tf) \le \frac{1}{2}$.

On en tire facilement $\Pi_{k,p}(Tf) \le C_{k,p} \sum_{n+s \le N_{k,p}} \Pi_{n,s}(f)$, avec $C_{k,p} = \frac{1}{\alpha_{k,p}}$ et les arguments usuels f/Π etc....

∎

Proposition 6

> Les opérateurs $Df = f'$ et $Lf(x) = ixf(x)$ sont continus $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. De plus on a pour tout $f \in \mathcal{S}$, $\widehat{Df} = L\hat{f}$ et $D\hat{f} = -\widehat{Lf}$.

Dem

$\Pi_{k,p}(Df) = \Pi_{k,p+1}(f)$

$\Pi_{k,p}(Lf) \le \Pi_{k+1,p}(f) + p\,\Pi_{k,p-1}(f)$ car $D^p(Lf)(x) = x D^p f(x) + p D^{p-1} f$.

Le reste on l'a déjà vu.

∎

Corollaire 7

> Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus $f \longmapsto \hat{f}$ est continue $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Dem

$L^k D^p \hat{f} = (-1)^p L^k(\widehat{L^p f}) = (-1)^p \widehat{D^k L^p f}$

$\Rightarrow \Pi_{k,p}(\hat{f}) = \| L^k D^p \hat{f} \|_\infty = \| \widehat{D^k L^p f} \|_\infty \le \| D^k L^p f \|_1 \le \pi \left(\Pi_{0,0}(D^k L^p f) + \Pi_{2,0}(D^k L^p f) \right)$

en vertu de la majoration obtenue au Corollaire 5, 1).

$< \infty$ en vertu de la continuité de D et L : $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Cela montre que $\hat{f} \in \mathcal{S}$. Et même que $\Pi_{k,p}(\hat{f}_n - \hat{f}) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ si $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$. ∎

Proposition 8

> Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $h > 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nh)h$ converge et
>
> $$\lim_{h\to 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nh)h = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt.$$

Dem

$$S^-_{h,A} = \sum_{h|n|\leq A} hf(nh), \quad S^+_{h,A} = \sum_{h|n|>A} hf(nh)$$

Par la théorie usuelle des sommes de Riemann : $\lim_{h\to 0^+} S^-_{h,A} = \int_{-A}^{A} f(t)\,dt$.

Si $h \in [0, h_0]$, alors

$$\sum_{h|n|>A} h|f(nh)| \leq \frac{2\,\Pi_{0,2}(f)}{h} \sum_{nh>A} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2\,\Pi_{0,2}(f)}{h} \sum_{nh>A} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{2\,\Pi_{0,2}(f)}{h\lfloor A/h \rfloor} \leq \frac{2\,\Pi_{0,2}(f)}{A - h_0}$$

La série $S^+_{h,A}$ converge donc, unif sur $[0, h_0]$.

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} hf(nh) = S^-_{h,A} + S^+_{h,A}$ cv donc.

Quand A tend vers $+\infty$, $S^-_{h,A}$ conv unif vers

$$\lim_{A\to+\infty} S^-_{h,A} = \lim_{A\to+\infty} S^-_{h,A} + S^+_{h,A} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} hf(nh).$$

On peut donc échanger les limites :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} hf(nh) = \lim_{h\to 0} \lim_{A\to+\infty} \sum_{h|n|\leq A} hf(nh) = \lim_{A\to+\infty} \lim_{h\to 0} \sum_{h|n|\leq A} hf(nh) = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$ ∎

Corollaire 9

> Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$, alors
>
> $$\hat{f}(\xi) = \lim_{h\to 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h f(nh)\, e^{-inh\xi}.$$

Théorème 10

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{f}} = \frac{1}{2\pi}\hat{\check{f}}}$$

Dem

Commençons par $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que $\text{support}(f) \subset [-R,R]$. Soit g la fonction $2R$-périodique, égale à f sur $[-R,R]$. Alors

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\frac{in\pi x}{R}}, \text{ avec } c_n = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-in\frac{\pi}{R}t}\, dt = \frac{1}{2R}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{R}\right)$$

Donc pour $|x| \leq R$ on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi}{R}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{R}\right) e^{\frac{in\pi x}{R}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h\,\hat{f}(nh)\, e^{inhx} \quad \text{avec } h = \pi/R.$$

Quand $R \to +\infty$, alors $h \to 0$ et on obtient, via la Proposition 8,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, dx.$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ maintenant, on l'approche par une suite $(f_n) \subset C_K^\infty$, pour la distance d de $\mathcal{S}$.

On a $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f_n}(\xi)\, e^{i\xi x}\, dx.$

La transf. de Fourier est continue sur $\mathcal{S}$, donc $\hat{f_n} \to \hat{f}$ et on obtient $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, dx.$

$\blacksquare$

Corollaire 11

La transformée de Fourier établit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Théorème 12

Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}$$

Dem

Si $f \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, on refait comme ci-dessus avec g. On a donc Parseval :

$$\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \text{, avec } c_n = \frac{1}{2R}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{R}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |f(t)|^2\, dt = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi}{R} \left|\hat{f}\left(\frac{n\pi}{R}\right)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

∎

Théorème 13

Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx.}$$

Dem

Polarisation : $\frac{1}{4}\left(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f-ig\|_2^2 - i\|f+ig\|_2^2\right) = \langle f, g\rangle$

donc $\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}}(x)\, \hat{g}(x)\, dx.$

Prenons $f = \overline{\hat{h}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{h}\, g = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int \overline{\hat{\overline{\hat{h}}}}\, \hat{g}}_{= \int h\, \hat{g}.}$

$\overline{\hat{\overline{\hat{h}}}} = \overline{\overline{\check{\hat{h}}}} = \check{\hat{h}} = 2\pi h$

∎

3) Retour à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Théorème 14

Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,g(x)\,dx.}$$

Dem

Soient $(f_n), (g_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, $g_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} g$, alors

$$\|f\hat{g} - \hat{f}g\|_1 \leq \|f\hat{g} - f\hat{g}_n\|_1 + \|f\hat{g}_n - f_n\hat{g}_n\|_1 + \cancel{\|f_n\hat{g}_n - \hat{f}_n g_n\|_1} + \|\hat{f}_n g_n - \hat{f} g_n\|_1 + \|\hat{f}g_n - \hat{f}g\|_1$$

$$\leq \|f\|_1 \|\hat{g} - \hat{g}_n\|_\infty + \|f - f_n\|_1 \|\hat{g}_n\|_\infty + \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \|g_n\|_1 + \|\hat{f}\|_\infty \|g_n - g\|_1$$

$$\leq \|f\|_1 \|g - g_n\|_1 + \|f - f_n\|_1 \|g_n\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g_n\|_1 + \|f\|_1 \|g_n - g\|_1$$

$\xrightarrow[n]{} 0$, car $\|f_n\|_1$ et $\|g_n\|_1$ sont bornés. ∎

Proposition 15

Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a $f\check{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} * g \in C_0^0(\mathbb{R})$ et $\widehat{f\check{g}} = \hat{f} * g$

Dem

- $|f(x)\,\hat{g}(-x)| \leq \|g\|_1 |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
- $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$, donc $\hat{f} * g \in C_0^0(\mathbb{R})$.
- $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\widehat{g(x-t)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-ixt}\,\check{g}(t)\,dt = \widehat{f\cdot\check{g}}$. ∎

Proposition 16

Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$g = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|u|}{R}\right) \hat{g}(u)\, e_u\, du$$

au sens de la convergence en norme dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Dem

Soit $\Delta(t) = (1-|t|)^+$, alors $\hat{\Delta}(\xi) = \operatorname{sinc}^2(\xi/2)$. On a $\hat{\Delta} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0_0(\mathbb{R})$, donc les fonctions

$$f_\alpha(x) = \frac{\widehat{\Delta(\alpha .)}(u)}{\|\hat{\Delta}\|_1} = \frac{1}{\alpha}\frac{\hat{\Delta}(u/\alpha)}{\|\hat{\Delta}\|_1}$$

$0<\alpha<1$

réalisent une approximation de l'unité quand $\alpha \to 0$. (cf T.D.). Donc $f_\alpha * g \xrightarrow[\alpha\to 0]{L^1} g$.

Mais on a:

$$\widehat{\Delta(\alpha .)} * g = \widehat{\Delta(\alpha .)\check{g}} = \check{\widehat{\Delta(-\alpha .)\hat{g}}} = \check{\widehat{\Delta(\alpha .)\hat{g}}}$$

Ainsi $\alpha = 1/R$ $\quad g(\cdot) = \lim_{R\to\infty} L^1 \frac{1}{\|\hat{\Delta}\|_1}\int_{\mathbb{R}} \Delta(u/R)\,\hat{g}(u)\,e_u(\cdot)\,du.$

Il reste à calculer $\|\hat{\Delta}\|_1$. On a $\widehat{\operatorname{sinc}^2}(u) = \pi\,\Delta(u/2)$ (cf T.D.). Donc $\|\hat{\Delta}\|_1 = \hat{\hat{\Delta}}(0)$
et $\hat{\Delta}(u) \geq 0$

$= 2\pi\,\Delta(2.0)$

$= 2\pi.$

$$\left(\hat{\Delta}(\xi) = \operatorname{sinc}^2(\xi/2),\ \hat{\hat{\Delta}}(\xi) = \widehat{\operatorname{sinc}^2(\xi/2)} = 2\,\widehat{\operatorname{sinc}^2}(2\xi) = 2\pi\,\Delta(\xi) \text{ en } 0 : 2\pi.\right)$$

∎

Corollaire 17

> La transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$

Dem
Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\hat{g} \equiv 0$, alors par la Proposition 16 $g \equiv 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$. ∎

On note $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R});\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$. On munit $A(\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_1 + \|\hat{f}\|_1$.

Théorème 18

> Si $f \in A(\mathbb{R})$, alors quelque soit la fonction représentant la classe de f, on a
>
> $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi \quad \text{presque partout.}$$
>
> On peut supposer $A(\mathbb{R}) \subset C^0_0(\mathbb{R})$ et, dans ce cas, $\forall f \in A(\mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi \quad \forall x.$

Dem

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un représentant d'un élément de $A(\mathbb{R})$. On pose $h = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f}} \in C_0^0(\mathbb{R})$, montrons que $f(x) = h(x)$ pour presque tout x. D'après la Proposition 16, il existe une suite $(R_n) \to +\infty$ telle que $f(x) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-R_n}^{R_n} \left(1 - \frac{|u|}{R_n}\right) \hat{f}(u) e_u(x) du$ pour p.p. x.

Mais $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$, donc $\mathbb{1}_{[-R_n, R_n]}(u) \left(1 - \frac{|u|}{R_n}\right) |\hat{f}(u)| |e_u(x)| \leq |\hat{f}(u)| \in \mathcal{L}^1$, on peut donc appliquer conv. dominée et $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e_u(x) du$.

Le reste du thm est facile.

Proposition 19

1) $A(\mathbb{R})$ est un Banach
2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$, alors $f \in A(\mathbb{R})$ ssi $\hat{f} \in A(\mathbb{R})$
3) Si $f, g \in A(\mathbb{R})$ alors $fg \in A(\mathbb{R})$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.
4) Si $(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times A(\mathbb{R})$ alors $f * g \in A(\mathbb{R})$ et $f * g = \frac{1}{2\pi} \check{(\hat{f}\hat{g})}$

Dem

1) Si (f_n) est de Cauchy ds $A(\mathbb{R})$ alors (f_n) et $(\hat{f}_n)$ sont de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$, donc

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f \in \mathcal{L}^1 \\ \hat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} g \in \mathcal{L}^1 \end{cases}$$

Mais $f_n = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f}}_n$, donc $\| f_n - \frac{1}{2\pi} \check{g} \|_\infty = \frac{1}{2\pi} \| \check{(\hat{f}_n - g)} \| \leq \frac{1}{2\pi} \| \hat{f}_n - g \|_1 \to 0$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{unif}} \frac{1}{2\pi} \check{g} \in C_0^0$, ce qui veut dire en particulier que $f = \frac{1}{2\pi} \check{g}$.

Ainsi $\check{g} \in \mathcal{L}^1$ et donc $\hat{g} \in \mathcal{L}^1$, i.e $g \in A(\mathbb{R})$. Ce qui donne $\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \hat{\check{g}} = g$.

$\| f_n - f \|_{A(\mathbb{R})} = \| f_n - f \|_1 + \| \hat{f}_n - \hat{f} \|_1 = \| f_n - f \|_1 + \| \hat{f}_n - g \|_1 \to 0$. ✓

2) Si $f \in A(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$ et $\hat{\hat{f}}$ aussi (car $\hat{\hat{f}} = 2\pi f(-\cdot)$). Donc $\hat{f} \in A(\mathbb{R})$.

Inversement si $\hat{f} \in A(\mathbb{R})$ (et $f \in \mathcal{L}^1$ par hyp), alors f et $\hat{f} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in A(\mathbb{R})$.

3) Soient $f, g \in A(\mathbb{R})$, on pose $h = \frac{1}{2\pi} \hat{g} \in \mathcal{L}^1$. On sait que $\check{h} = g$ (ds $\mathcal{L}^1$), donc $f\check{h} = fg \in \mathcal{L}^1$ et $\widehat{fg} = \widehat{f\check{h}} = \hat{f} * h \in \mathcal{L}^1$ par les propriétés de $*$. par Proposition 15.

On a montré $fg \in A(\mathbb{R})$.

4) Soient $(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times A(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (car $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$). De plus $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ avec $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$ et $\hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Donc $\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ce qui montre $f * g \in A(\mathbb{R})$.

Théorème 20 (Dirichlet)

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si les limites $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ existent, si les dérivées à droite et à gauche $f_d'(x_0)$ et $f_g'(x_0)$ existent, alors

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x_0}\, d\xi = \frac{1}{2}\big(f(x_0+)+f(x_0-)\big).}$$

Notez bien ici que la seule hypothèse c'est $f\in\mathcal{L}^1$, on ne sait pas si $\hat{f}\in\mathcal{L}^1$. Donc la limite $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$ ci-dessus est une limite très particulière ; elle n'est pas égale à $\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x_0}d\xi$, qui peut ne pas exister. Bien sur, si $\hat{f}\in\mathcal{L}^1$ (i.e. $f\in A(\mathbb{R})$), alors on a

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2}\big(f(x_0+)+f(x_0-)\big).}$$

Dem

On commence par le cas $x_0=0$, $f(0_+)=f(0_-)=0$. On veut donc montrer que
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\hat{f}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Mais $\displaystyle\int_{-R}^{R}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi/R)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} R\,\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(R\xi)\, f(\xi)\,d\xi = 2\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,\frac{\sin(R\xi)}{\xi}\,d\xi.$

Posons $g(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2t}$ (notez que g admet une limite en 0 par les hypothèses du thm).

Montrons que $g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: comme $\lim_0 g(x)$ existe, on a g bornée sur $[-\alpha,\alpha]$ pour $\alpha>0$ suffisament petit ; sur $\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]$, on a $|g(t)| \le \dfrac{|f(t)|+|f(-t)|}{2\alpha}$ intégrable. Donc $g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On a alors
$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)+f(-x)}{2x}\,e^{-i\xi x}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{2x}\left(e^{-i\xi x}-e^{i\xi x}\right)dx = i\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{x}\sin(\xi x)\,dx$$

On a montré : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{i}{\pi}\,\hat{g}(R).$

Quand $R\to+\infty$, alors $\hat{g}(R)\to 0 = \dfrac{f(0+)+f(0-)}{2}$. ✓

Cas général : x_0 qcq, $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ qcq.

On pose
$$g(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}\,e^{-t^2}.$$
Alors g est intégrable et $g(0+)=g(0-)=0$.

On a donc

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{g}(\xi)\, d\xi = 0$$

i.e. $$\lim_{R\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{\widehat{f(x_0+\cdot)} + \widehat{f(x_0-\cdot)}}{2} (\xi)\, d\xi}_{} = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \widehat{e^{-t^2}}(\xi)\, d\xi}_{}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix_0\xi} \hat{f}(\xi) + e^{-ix_0\xi} \hat{f}(-\xi)}{2} d\xi \qquad = \frac{1}{2\pi} \check{\widehat{e^{-t^2}}}(0) = e^{-t^2}(0)$$

car $e^{-t^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{ix_0\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \qquad = 1$$

∎

4) Le cas $L^2(\mathbb{R})$

Proposition 21

> Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} \in L^2 \cap C_0^0$ et $\frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$

Dem

Il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans L^1 et dans L^2 (cf T.D.)

On a alors $\hat{f}_n \to \hat{f}$ dans $C_0^0(\mathbb{R})$, donc $\mathbb{1}_{[-m,m]} \hat{f}_n \xrightarrow[n]{L^2} \mathbb{1}_{[-m,m]} \hat{f}$.

D'autre part $\| \mathbb{1}_{[-m,m]} \hat{f}_n \|_2^2 \leq \|\hat{f}_n\|_2^2 = 2\pi \|f_n\|_2^2$ (Thm 12).

Quand on fait $n\to\infty$: $\| \mathbb{1}_{[-m,m]} \hat{f} \|_2^2 \leq 2\pi \|f\|_2^2$, $\forall m$

Par convergence monotone : $\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_2^2 \leq 2\pi \|f\|_2^2$.

Si on applique cette inégalité à $f_n - f$, on trouve $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2^2 \leq 2\pi \|f_n - f\|_2^2$, donc $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \hat{f}$.
Et comme on a $\|\hat{f}_n\|_2^2 = 2\pi \|f_n\|_2^2$, on trouve finalement $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$. ∎

Théorème 22 (Plancherel)

> L'application linéaire $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^1 \cap L^2 \to L^2 \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ se prolonge en un unique opérateur continu de $L^2 \to L^2$, que l'on note encore $\mathcal{F}$. On a de plus :
>
> 1) $\mathcal{F}$ est isométrique (à une constante près) : $\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.
>
> 2) $\mathcal{F}$ est bijective, son inverse est donné par $\mathcal{F}^{-1}(h) = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}(\bar{h})}$.
>
> 3) Presque partout, on a $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) = f(-x)$.

<u>Attention</u> : La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ définit une vraie fonction $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$. La fonction $\hat{f}$ est alors définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La transformée de Fourier-Plancherel ne définit qu'un élément de $L^2(\mathbb{R})$; si $f \in L^2 \setminus L^1$, alors $\mathcal{F}(f)(x)$ n'est pas définie pour un x précis ; ce qui n'empêche pas d'écrire une expression littérale pour $\mathcal{F}(f)(x)$ (qui ne sera valable que pour p.p. x. Notez que $\mathcal{F}(f)$ n'est pas en général continue, ni ne tend vers 0 en $\pm\infty$.

<u>Dem</u>

1) $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 car $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$. Donc on prolonge $\mathcal{F}$.

2) Posons $\mathcal{G}(h) = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}(\bar{h})}$ pour tout $h \in L^2$. Pour $h \in A(\mathbb{R})$ on a alors, presque partout

$$\mathcal{G}(h)(x) = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{\mathbb{R}} \overline{h(u)}\, e^{-iux}\, dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(u)\, e^{iux}\, dx = \frac{1}{2\pi} \check{h}(x)$$

Donc $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(h) = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}(h) = h$ pour tout $h \in A(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (en effet $|f(x)|^2 \leq \|f\|_\infty |f(x)| \in L^1$) est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on obtient : $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(h) = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}(h) = h \quad \forall h \in L^2$. Donc $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$ dans L^2.

3) Pour $f \in A(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f(-\cdot)$. Ensuite on raisonne encore par densité et continuité !

∎

$\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ est appelée <u>transformée de Fourier-Plancherel</u> et est notée $\hat{f}$.

<u>Proposition 23</u>

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $A > 0$, posons $\mathcal{F}_A(f)(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$. Alors,

1) $\lim_{A \to +\infty} \|\hat{f} - \mathcal{F}_A(f)\|_2 = 0$

2) s'il existe une suite $(A_n) \to +\infty$ telle que $(\mathcal{F}_{A_n}(f)(\xi))$ converge pour presque tout ξ alors $\hat{f}(\xi) = \lim_n \mathcal{F}_{A_n}(f)(\xi)$ p.p.

<u>Dem</u>

1) On a $1\!\!1_{[-A,A]} f \in L^1 \cap L^2$ $\left(\int 1\!\!1_{[-A,A]} |f| \leq \left(\int 1\!\!1^2_{[-A,A]}\right)^{1/2} \left(\int f^2\right)^{1/2} \right)$, donc $\mathcal{F}_A(f) = \widehat{1\!\!1_{[-A,A]} f}$

$\|1\!\!1_{[-A,A]} f - f\|_2 \xrightarrow[A \to \infty]{} 0$ par conv. dom. Donc le thm de Plancherel montre que

$\|\widehat{1\!\!1_{[-A,A]} f} - \hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f 1\!\!1_{[-A,A]} - f\|_2$ tend vers 0.

2) Soit $g(\xi) = \lim_n \mathcal{F}_{A_n}(f)(\xi)$ p.p. Comme $\mathcal{F}_{A_n}(f) = \widehat{f \mathbb{1}_{[-A_n,A_n]}}$ conv. vers $\hat{f}$ dans $\mathcal{L}^2$, il existe une sous-suite $\mathcal{F}_{A_{\varphi(n)}}(f)$ qui converge vers $\hat{f}$ p.p. Donc $g(\xi) = \hat{f}(\xi)$ p.p. ∎

Proposition 24

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ et } \hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \text{ alors } f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).}$$

Non démontré !