CORRIGE DE L'EXAMEN DU 19/12

Exercice 1 (4 points)
1) (2 pts) On applique le théorème des accroissements finis à $\arctan x$ sur $[n, n+1]$. On a donc

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = (n+1-n)\ \arctan'(c)$$

pour un $c \in [n, n+1]$. C'est à dire

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \frac{1}{1+c^2}\,.$$

Comme $c \in [n, n+1]$, on a

$$\frac{1}{1+c^2} \in \left[\frac{1}{1+(n+1)^2}, \frac{1}{1+n^2}\right]$$

d'où l'inégalité demandée.

2) (2 pts) En sommant la première inégalité pour

$$S_n - 1 = \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+n^2}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &S_n - 1 \\ &\le \arctan(1) - \arctan(0) + \arctan(2) - \arctan(1) + \ldots \arctan(n) - \arctan(n-1) \\ &= \arctan(n)\,. \end{aligned}$$

Comme $\arctan(x) \le \pi/2$ pour tout x, on conclut facilement.

Exercice 2 (5 points)
Le domaine est $I\!R$, la dérivée est

$$\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,.$$

La fonction est paire et 2π-périodique.
Valeurs particulières :

$$f(0) = \pi/4, \quad f(\pi/2) = 0, \quad f(\pi) = -\pi/4\,.$$

Il suffit de faire le tableau de variation sur $[0, \pi]$. La fonction est décroissante sur cet intervalle.
Dans le graphe, que je ne peux pas représenter ici, il faut tenir compte de la dérivée nulle en 0 et en π et de la dérivée -1 en $\pi/2$.

Exercice 3 (5 points)
On écrit

$$\frac{x+1}{x^2+x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+2}$$

Le premier terme s'intègre facilement et donne

$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+x+2\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Le second terme doit fournir arctan après 2 changements de variables :

$$y = x + \frac{1}{2}$$

puis

$$z = \frac{2}{\sqrt{7}}y\,.$$

Ce qui donne finalement, pour ce deuxième terme :

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\left[\arctan z\right]_{1/\sqrt{7}}^{3/\sqrt{7}}\,.$$

Exercice 4 (3 points)
On écrit

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

pour linéariser $\cos^4(x)$. En développant on trouve

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\,.$$

Le calcul de l'intégrale devient immédiat. On trouve

$$\frac{8+3\pi}{32}\,.$$

Exercice 5 (4 points)
L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 5 = 0\,,$$

qui admet les deux racines $1+2i$ et $1-2i$. Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_0(x) = e^x\left(\lambda\,\cos(2x) + \mu\,\sin(2x)\right),$$

$\lambda, \mu \in I\!R$.
On cherche une solution particulière de la forme

$$y_1(x) = \alpha\,\cos(x) + \beta\,\sin(x)\,.$$

En injectant dans l'équation on trouve $\alpha = -1/5$ et $\beta = 1/10$.

Les solutions générales sont

$$e^x\left(\lambda\,\cos(2x) + \mu\,\sin(2x)\right) - \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x),$$

$\lambda, \mu \in I\!R$.

Exercice 6 (4 points)

Le vecteur $\vec{N} = (1, 3, 1)$ est normal au plan. Le point $B = (x, y, z)$ que l'on cherche est

1) dans le plan (P)

2) tel que le vecteur $\vec{AB}$ est colinéaire à $\vec{N}$.

On écrit donc que $\vec{AB} \wedge \vec{N} = \vec{0}$, ainsi que les conditions $B \in (P)$. On trouve finalement $B = (7/11, 21/11, -4/11)$.

La rédaction et la présentation ont été notées sur 2 points.

Ce qui fait un total possible de 27 points !