

EXAMEN FINAL DE T.M.B.

Mardi 19 Décembre 2006

Durée : 2h00.

Tout document interdit. Calculatrices interdites.

La présentation et la rédaction seront notées.

Exercice 1 :

1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{1}{1 + (n + 1)^2} \leq \arctan(n + 1) - \arctan(n) \leq \frac{1}{1 + n^2}.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{1 + 1^2} + \frac{1}{1 + 2^2} + \dots + \frac{1}{1 + n^2}.$$

Montrez que

$$S_n \leq \frac{\pi}{2} + 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

On considère la fonction

$$f(x) = \arctan(\cos(x)).$$

Étudiez cette fonction : domaine de définition, dérivée, symétries et périodicité éventuelles, tableau de variation, valeurs particulières, graphe.

Exercice 3 :

Calculez

$$\int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + x + 2} dx$$

Exercice 4 :

Calculez

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x)^4 dx$$

Exercice 5 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = -\cos(x).$$

Exercice 6 :

Soit (P) le plan de \mathbb{R}^3 d'équation

$$x + 3y + z = 6.$$

Soit A le point de \mathbb{R}^3 de coordonnées $(1, 3, 0)$ dans la base canonique. Calculez les coordonnées de B , son projeté orthogonal sur (P) .