UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I **2006-2007**

L1-Maths 2
Feuille n°5

Exercice n°1
1°) On pose
$$f := \sqrt{u+v}, \qquad u := e^{x+y} \qquad \text{et} \qquad v := \ln y.$$
Par un calcul direct, exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.
Retrouver le résultat avec la formule vue en cours.

2°) Reprendre la question précédente avec
$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & f := u \sin v, & u := x^2 - y^2, & v := 2xy, \\ \text{(ii)} & f := \sqrt{1+u^3+v}, & u := 1/x, & v := x+y, \\ \text{(iii)} & f := \ln(u + \cos v), & u := \operatorname{ch} x, & v := x \operatorname{sh} y. \end{array}$$

Exercice n°2
On se donne des fonctions différentiables $X, Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$.
On pose
$$\gamma(t) := f\big(X(t), Y(t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$
En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 (avec petit o) à X, Y et f, montrer que γ est dérivable et calculer γ'.

Exercice n°3
Calculer les dérivées partielles du second ordre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ des fonctions suivantes :
$$\text{(i)} \quad f(x,y) = e^x(\cos x + x \sin y), \qquad \text{(ii)} \quad f(x,y) = \ln(x^2+y).$$
Que remarque-t-on ? Justifier la remarque par un résultat du cours.

Exercice n°4
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *coercive* si
$$\lim_{||m|| \to +\infty} f(m) = +\infty.$$

On admettra le résultat suivant :

Théorème. Une fonction continue et coercive admet un minimum global.

Dans cet exercice, f désigne la fonction définie par

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - 4xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

1°)

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En calculant de deux façons $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2$, montrer que

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta).$$

b) Montrer, en considérant $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, que f est coercive.

2°) Montrer que f a un minimum global que l'on calculera. Préciser en quels points (x,y) ce minimum est atteint.

3°) Une fonction coercive peut-elle admettre un maximum global ?

Exercice n°5

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) := x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

1°) Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x^2+y^2).$$

2°) En déduire les minima et extrema éventuels de f.

Exercice n°6

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes, dont l'inconnue est une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable.

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y) \text{ avec } g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Exercice n°7
On veut résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ et c est une constante non nulle. Pour cela, on introduit les nouvelles variables

$$u := x - ct, \qquad v := y + ct.$$

1°) Montrer que l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrit alors

$$(\mathcal{E}') \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

2°) Résoudre $(\mathcal{E}')$. En déduire que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions de la forme $f = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$, où φ et ψ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ arbitraires.